И. Б. Бекбоев

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКАНЫН ЖАЛПЫ КУРСУ

ББК 74.58
Б-42

Китептин биринчи басылышын 1984-жылы Кыргыз ССР Жогорку жана атайын орто билим берүү министерствосу жогорку окуу жайларынын физмат факультеттеринен башка факультеттер үчүн окуу куралы катары бекиткен.

Бекбоев И.Б.
Б-42. Жогорку математиканын жалпы курсу: Жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн окуу куралы. Б. 2000. – 224 б.

ISBN 9967-20-243-3

Арапбаева

Китептин экинчи басылышына жоопкер *А.Айылчиев* — физика-математика илимдеринин кандидаты, профессор

Б 4309000000 -2000
ISBN 9967-20-243-3

ББК 74.58

Алгы сөз

2000-жылдын 10-январында элибиздин чыгаан уулдарынын бири, Кыргызстанда эле эмес мурдагы СССР, азыркы Шериктештикке кирген өлкөлөрдө кеңири таанымал окумуштуу-педагог, математиканы окутуунун методикасы боюнча ири адис жана ушул багыттагы илимпоз окумуштуулардын кыргыз мектебин негиздөөчү, Кыргыз билим берүү институтунун директору, Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын мүчө-корреспонденти, Эл аралык Педагогикалык жана социалдык илимдер академиясынын академиги, Кыргыз Республикасынын эмгек сиңирген мугалими, педагогика илимдеринин доктору, профессор Бекбоев Исак Бекбоевич 70 жашка чыкты.

Көрүнүктүү окумуштуунун педагогика илиминин теориясына, жалпы орто жана жогорку билим берүү, педагог кадрларды кайра даярдоо жана алардын кесиптик чеберчилигин жогорулатуу, илимий-педагогикалык кадрларды даярдоо тармактарында кошкон олуттуу салымдарын айтпаганда да, республикабызда математикалык билим берүүнү өнүктүрүүдөгү эмгеги чынында ат көтөргүс. Математиканы окутуунун теориялык маселерин терең изилдөө менен бирге И.Б.Бекбоев мугалимдер, студенттер, даярдоо курстарынын угуучулары, мектеп окуучулары үчүн ондогон усулдук колдонмолорду, окуу куралдарын даярдап чыгарган. Жарык көргөн учурунда алардын бардыгы керектөөчүлөр тарабынан кызуу жактыруу менен кабыл алынып, кеңири колдонулуп келген. Мурда басылып чыккандарынын көбү азыркы учурда сейрек кездешүүчү адабияттардан болуп калды..

Профессор И.Б.Бекбоев орто мектептин дээрлик бардык класстары үчүн математика боюнча кыргыз тилиндеги окуу китептеринин негиздөөчүсү жана башкы авторлорунун бири болуп эсептелет. Ал окуу китептери окуучулардын өз алдынча ой жүгүртүүсүн өнүктүрүүгө, математикалык ойлоо ишмердүүлүгүн калыптандырууга багытталгандыгы о.э. балдардын жаш курактык өзгөчөлүктөрүнө ылайык жетимдүү, жатык тилде баяндалгандыгы менен өзгөчөлөнүп турат.

Колуңуздардагы окуу куралы 1984-жылы басылып чыккан. Ал кезинде жогорку окуу жайлары үчүн математика боюнча кыргыз тилиндеги өтө аз сандагы окуу куралдарынын бири эле. Ал эми бүгүн бул окуу китеби математика менен физикадан башка адистиктерге даярдалып жаткан студенттер үчүн жогорку математика курсу боюнча бирден бир окуу куралы десек жаңылышпайбыз. Мурда аз гана нускада чыккандыктан окуу куралынын биринчи басылышын азыркы учурда студенттер эле эмес, окутуучулардын өздөрүнүн табышы да кыйын болуп калды. Ошондуктан, көпчүлүк жогорку окуу жайларында бүгүн окутуу мамлекеттик тилде жүргүзүлүп жаткандыгына жана билим берүү стандартына ылайык дээрлик бардык адистиктер боюнча кадрларды даярдоонун окуу планына жогорку математика курсу киргизилгендигине байланыштуу окутуучулардын, айрыкча студенттердин муктаждыктарын канааттандыруу максатында, о.э. автордун 70 жылдык маарекесине арналып бул окуу куралы кайрадан басылды.

Окуу куралы жогорку математиканын негизги бөлүмдөрү болгон аналитикалык геометрияны, вектордук алгебраны, дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдү жана катарларды камтыйт. Ар бир жаңы түшүнүк, касиет, алгоритм ылайыктуу тандалып алынган мисалдар менен бышыкталган. Параграфтардын аягында билимди өз алдынча колдонууга, тема боюнча өзүн-өзү текшерүүгө багытталган, жеңилден татаалга өтүү принцибине ылайык түзүлгөн маселелердин топтому берилген. Окуу материалы баштан-аяк ийкемдүү, түшүнүктүү тил менен баяндалган.

Окуу куралы студенттердин математика илиминин негиздерин өздөштүрүүсүнө зор көмөк көрсөтө тургандыгына шек жок.

Авторду 70 жаш кутман курагы менен чын дилден куттуктап, ага чың ден соолук, узак өмүр, педагогика илиминде, билим берүү майданында талыкпастан жемиштүү эмгектене берүүсүн каалап кетмекчимин.

Кыргыз Республикасынын
Улуттук илимдер академиясынын
мүчө-корреспонденти, физика-
математика илимдеринин доктору,
профессор, Мамлекеттик
сыйлыктын лауреаты, илимге
эмгек сиңирген ишмер **А.А.Бөрүбаев**

I БӨЛҮМ

АНАЛИТИКАЛЫК ГЕОМЕТРИЯ ЖАНА ВЕКТОРДУК АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

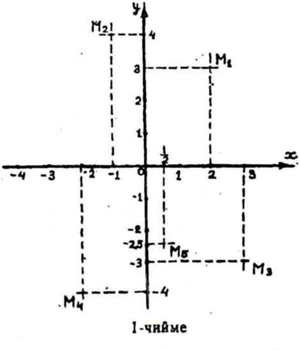
I глава. ТЕГИЗДИКТЕГИ АНАЛИТИКАЛЫК ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Декарттык тик бурчтуу координаталар системасы

Тегиздикте, бири-бири менен тик бурч боюнча кесилише турган эки түз сызыкты түзөбүз. Алардын кесилишкен чекитин координаталар башталмасы деп атап, O менен белгилейбиз. Мында горизонталь түз сызыкка солдон оңду карай багыт берип, аны Ox аркылуу белгилеп, абцисса огу деп атайбыз, ал эми вертикаль түз сызыкка төмөнтөн жогору карай багыт берип, аны Oy аркылуу белгилеп, ордината огу деп атайбыз. Ал октор жебе аркылуу көрсөтүлгөн (1-чийме).

Эми каалагандай e кесиндисин масштаб бирдиги үчүн кабыл алып (иш жүзүндө $e=1$ мм, см, м, ... алынат), Ox жана Oy окторуна O чекитинен баштап оң жана терс багыттар боюнча ченеп коюп чыгабыз. Мында бардык оң жана терс бүтүн сандарга ал октордо жаткан бирден чекит туура келет. Ал эми p/q түрүндөгү ар кандай бөлчөктүү санга дагы бирден чекит туура келет. Бул чекитти табуу үчүн e масштаб бирдигин барабар q бөлүккө бөлүп, анын ар бир бөлүгүн p оң болсо, оң багыт боюнча, p терс болсо, терс багыт боюнча p ирет ченеп коюш керек. Ошол сыяктуу эле каалагандай иррационалдык санга дагы ал октордон бирден чекит туура келет.

Өз ара тик бурч боюнча O чекитинде кесилишүүчү, оң жана терс багыттары көрсөтүлгөн, e масштаб бирдиги менен жабдылган Ox жана Oy октору декарттык тик бурчтуу координаталар системасы деп аталат. Мында октор кесилишкен O чекитин эсептөөнүн башталмасы деп дагы аташат.



1-чийме

Тегиздиктеги каалагандай M чекитинин декарттык координаталар системасына карата абалын оңой эле аныктоого болот. Ал үчүн ошол M чекитинен Ox жана Oy окторуна перпендикуляр түшүрүп, алардын окторго чейинки аралыктарын e

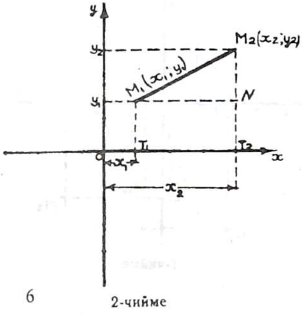
масштабы боюнча аныктоо керек. Мында M ден Oy огуна чейинки аралык, ошол M чекитинин *абсциссасы* деп, ал эми Ox огуна чейинки аралыгы M дин *ординатасы* деп аталат да абсциссасы x аркылуу, ординатасы y аркылуу белгиленип, шарттуу түрдө $M(x, y)$ делип жазылат. Мындагы x менен y ти M чекитинин *координаталары* деп да коюшат.

Эми тескерисинче, координаталары мурдатан белгилүү болгон $M(x, y)$ чекити берилсин. Анда x оң болсо Ox огунун оң багыты боюнча O дон баштап x санын ченеп коюп, ошол x ке туура келген чекиттен Ox ке перпендикуляр тургузабыз. Эгер x терс сан болсо, анда аны Ox тин терс багыты боюнча ченеп коюш керек. Ошол сыяктуу эле эгер y оң болсо, аны Oy огунун оң багыты боюнча, эгер y терс болсо, терс багыт боюнча ченеп коюп, ошол y ке туура келген чекиттен Oy огуна перпендикуляр тургузууу керек. Мындагы эки перпендикуляр кесилишкен чекит $M(x, y)$ чекити болот.

Мына ошентип, тегиздиктеги каалагандай чекитке кандайдыр эки анык сан туура келет, тескерисинче каалагандай иреттүү эки анык санга тегиздиктеги кандайдыр бир чекит туура келет.

Декарттык координаталар системасынын Ox жана Oy октору тегиздикти төрт чейрекке бөлөт. Эки ок тең оң багытта болгон чейректи I аркылуу белгилеп, калгандарын сааттын жебесинин кыймылына каршы багыт боюнча II, III жана IV деп белгилеп чыгабыз. Анда биздин шарттаршуубуз боюнча I чейректе $x>0$; $y>0$; II де $x<0$, $y>0$; III дө $x<0$, $y<0$; IV дө $x>0$, $y<0$ болот. Ошол эле шарттаршуубуз боюнча Ox огунда жаткан бардык чекиттер үчүн $y=0$, ал эми Oy огунда жаткан бардык чекиттер үчүн $x=0$ болот. Ал эми координаталар башталмасынын эки координатасы тең нөл болот: $O(0;0)$

Мисал үчүн 1-чиймеде $M_1(2, 3)$, $M_2(-1, 4)$, $M_3(3, -3)$, $M_4(-2, -4$, $M_5\left(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$ чекиттери көрсөтүлгөн.



2-чийме

§ 2. Тегиздиктеги эки чекиттин арасындагы аралык

Тегиздикте $M_1(x_1, y_1)$ жана $M_2(x_2, y_2)$ эки чекит берилсин. Алардын арасындагы d аралыгын аныктоо керек болсун. Бул эки чекиттин ар биринен Ox огуна перпендикуляр түшүрүп, алардын биринен экинчисиндеги перпендикуляр менен кесилишкенге чейин Ox огуна параллель сызык жүргүзөбүз. Мында M_1M_2N тик бурчтуу үч бурчтугу пайда болот (2-чийме).

Андан Пифагордун теоремасы боюнча:

$$d^2 = M_1M_2^2 = M_1N^2 + M_2N^2 \qquad (*)$$

экендиги белгилүү. Ошол эле 2-чийме боюнча:

$$|M_1N| = |T_1T_2| = |OT_2 - OT_1| = |x_2 - x_1|,$$
$$|M_2N| = |T_2M_2 - T_2N| = |y_2 - y_1|.$$

Буларды (*) га коюп: $d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$,

андан $d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$ (1)

формулага ээ болобуз. Аралык дайыма оң сан менен туюнтулгандыктан радикалдын плюс белгисин гана алабыз.

Мындан: *Эки чекиттин арасындагы аралык ал чекиттердин бир аттуу координаталарынын айырмаларынын квадраттарынын суммасынан алынган квадраттык тамырга барабар* деген корутундуга келебиз.

Координаталар башталмасынан каалагандай $M(x, y)$ чекитине чейинки аралыкты дагы ошол эле (1) формуладан пайдаланып эсептөөгө болот. Чынында эле $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = x$, $y_2 = y$ болгондуктан (1) ден:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1a)$$

формуласына келебиз.

Эскертүү: Жогорудагы (1) формула, M_1 жана M_2 чекиттери биринчи чейректе жаткан учурда чыгарылганы менен, ал чекиттердин бири же экөө тең калган чейректерде жаткан учурлары үчүн дагы туура болот.

Мындан аркы формулаларды чыгарууда да биз дайыма эле I чейректе иш жүргүзөбүз. Бирок келип чыккан формулалар бардык чейректөр үчүн туура болуп саналат.

Мисалдар. 1. $M_1(-1, 3)$ жана $M_2(4, -2)$ чекиттеринин арасындагы аралыкты аныктагыла.

Изделген аралык (1) формула боюнча табылат:

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(4+1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}.$$

2. Координаталар башталмасынан $M(-3, -4)$ чекитине чейинки аралыкты аныктагыла.

Бул сапар (1a) формуладан пайдаланабыз:

$$OM = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Эгерде ушул M_1, M_2, M чекиттерин түзүп алып, биринчи жолу M_1M_2 аралыгын ченеп, экинчисинде OM ди ченеп чыксак, формулалар боюнча эсептелип табылган ошол эле аралыктардын өздөрүнө ээ болобуз.

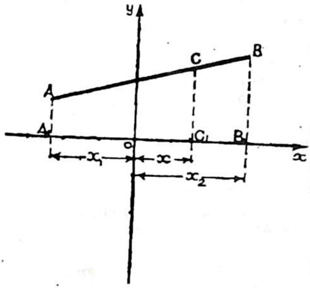
§ 3. Кесиндини берилген катышта бөлүү

$A(x_1, y_1)$ жана $B(x_2, y_2)$ эки чекитин туташтырган AB кесиндисин $C(x, y)$ чекити аркылуу

$$\frac{AC}{CB} = \lambda \qquad (1)$$

катышында бөлүү талап кылынсын, мында λ мурдатан берилген сан болсун. AB кесиндисин λ катышында бөлө турган C чекитинин x жана y координаталарын A жана B чекиттеринин белгилүү координаталары аркылуу туюнтуу керек. Ал үчүн A, C жана B чекиттеринен Ox огуна перпендикулярлар түшүрүп, алардын негиздерин A_1, C_1 жана B_1 аркылуу белгилейбиз (3-чийме). Мында AA_1, CC_1 жана BB_1 түз сызыктары параллель, демек алар AB түз сызыгы менен Ox огун пропорциялаш бөлүктөргө бөлөт, ошондуктан

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$$



3-чийме

Анда (1)

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \lambda. \qquad (2)$$

Ал эми 3-чиймеден: $A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x - x_1$; $C_1B_1 = OB_1 - OC_1 = x_2 - x$ болгондуктан, буларды (2) ге коюп чыксак,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$$

келип чыгат. Муну x ке карата чыгарсак

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad (3)$$

формуласы келип чыгат.

Ушул сыяктуу эле жол менен:

$$y = \frac{y + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (4)$$

формуласын табууга болот, ал үчүн A, C, B чекиттеринен перпендикулярларды OY огуна түшүрүп, алдыдагы сыяктуу эсептөөлөрдү кайталап чыгуу керек. Ошентип, AB кесиндисин λ катышта бөлүүчү C чекитинин координаталары (3) жана (4) формулалар менен табылат.

Мында C чекити AB кесиндисинин ичинде жатса, $\lambda > 0$ болуп, ал эми C чекити AB кесиндисинин уландысында жатса, $\lambda < 0$ болот, анткени биринчи учурда AC жана CB кесиндилердин багыттары бирдей, экинчи учурда карама-каршы болот. Эгер C чекити A менен дал келишсе, $\lambda = 0$ болуп, эгер C чекити B менен дал келишсе, анда λ аныкталбаган болот. $\lambda = -1$ боло албайт, анткени бул учурда (3) жана (4) формулалар мааниге ээ болбойт. Эгерде C чекити AB кесиндисинин тең ортосунда жатса, анда $AC = CB$

болоору белгилүү, натыйжада (1) ден $\lambda=1$ болуп калат. Бул учурда (3) жана (4) формулалардан, AB кесиндисинин ортоңку чекитинин координаталары үчүн:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \tag{5}$$

формулаларына ээ болобуз.

Эскертүү. (3) жана (4) AB кесиндиси Ox жана Oy октордун эч бирине параллель болбогон учур үчүн чыгарылды. Чынында ал формулалар AB кесиндиси октордун бирине параллель болсо да сакталат. Алсак, эгер $AB \parallel Oy$ болсо, анда $x_1=x_2=x$ болуп (3) формула өз күчүндө калат. Эгер $AB \parallel Ox$ болсо, (4) формула өз күчүндө калат.

Мисалдар. 1. $A(-2,1)$ жана $B(3,6)$ чекиттерин бириктирген AB кесиндисин $\lambda=\frac{3}{2}$ катышында бөлө турган $C(x,y)$ чекитин тапкыла.

Изделген x жана y координаталарын (3) жана (4) формулалардан табабыз:

$$x=\frac{-2+\frac{3}{2}\cdot 3}{1+\frac{3}{2}}=1;\ y=\frac{1+\frac{3}{2}\cdot 6}{1+\frac{3}{2}}=4,\ C\ (1,4)$$

2. Чокулары $A(2,-1)$, $B(4,3)$ жана $C(-2,1)$ болгон үч бурчтуктун жактарынын ортолорун аныктагыла.

Чыгаруу. а) AB жагынын ортосун E десек, (5) боюнча:

$$x_0=\frac{2+4}{2}=3,\ y_0=\frac{-1+3}{2}=1,\ E\ (3,1)$$

б) AC жагынын ортосу F болсун, анда

$$x_0=\frac{2-2}{2}=0,\ y_0=\frac{-1+1}{2}=0,\ F(0,0).$$

в) BC жагынын ортосу D болсун, анда

$$x_0=\frac{4-2}{2}=1,\ y_0=\frac{3+1}{2}=2,\ D(1,2).$$

A, B, C чокулары боюнча ABC үч бурчтугун түзүп, E, F, D чекиттерин дагы түзсөңөр жообуңардын тууралыгына ынанасыңар.

§ 4. Үч бурчтуктун аянты

Чокулары $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ жана $C(x_3, y_3)$ болушкан үч бурчтуктун аянтын эсептөө керек болсун. Мында $AC=b$, $AB=c$ болгондуктан тригонометриядан белгилүү болгон формула боюнча ал үч бурчтуктун S аянты:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} \tag{1}$$

аркылуу табылат. Эгер AB жана AC жактарынын Ox огу менен түзгөн бурчун ирети менен φ_1 жана φ_2 аркылуу белгилесек (4-чийме). $\angle A=\varphi_1-\varphi_2$ болору белгилүү. Анда S аянты үчүн

$$S=\frac{1}{2}bc\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{2}bc(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_1) \quad (2)$$

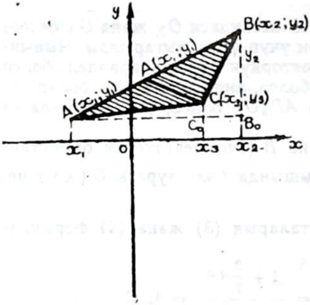
формула келип чыгат. Ошол эле 4-чийме боюнча:

$$c\cos\varphi_1=AB_0=A_1B_1=x_2-x_1,$$
$$c\sin\varphi_1=BB_0=y_2-y_1,$$
$$b\cos\varphi_2=AC_0=A_1C_1=x_3-x_1,$$
$$b\sin\varphi_2=CC_0=y_3-y_1.$$

Бул маанилерди (2) ге коюп чыксак:

$$S=\frac{1}{2}[(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y_3-y_1)] \quad (2a)$$

экендигине ынанабыз.



4-чийме

ABC үч бурчтугунун башкача жайгашуусунда S үчүн терс белги келип чыгышы ыктымал.

Ал эми экинчи тартиптеги аныктагычтын

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

аныктамасынан пайдалансак, S үчүн

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3-x_1 & y_3-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} \quad (3)$$

формуласына ээ болобуз. Аянт дайыма оң сан менен туюнтулгандыктан барабардыктын оң жагынын абсолюттук чоңдугу алынат.

Эгер $A(x_1, y_1)$ чокусу координаталар башталышында жатса, анда $x_1=y_1=0$ болуп:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad (3a)$$

формуласы келип чыгат.

Эгерде A, B, C чокулары бир түз сызыкта жатышса, анда $S=0$ болот; тескерисинче эгер $S=0$ болсо, анда A, B, C чокулары бир түз сызыкта жатышат.

Мисалдар. 1. Чокулары: $A(2, 0)$, $B(5, 3)$ жана $C(2, 6)$ болушкан үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.

Мында $x_1=2$, $y_1=0$; $x_2=5$, $y_2=3$ жана $x_3=2$, $y_3=6$ экендигин байкоо кыйын эмес. Демек, (3) боюнча

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (2-2) & (6-0) \\ (5-2) & (3-0) \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \left[0 - 18 \right] = 9\,\textit{бирд.}$$

2. Чокулары: $A\ (3,\ 1)$, $B\ (4,\ 6)$, $C\ (6,\ 3)$ жана $D\ (5,\ -2)$ болушкан төрт бурчтуктун аянтын эсептегиле.

Чыгаруу. Бул төрт бурчтуктун A жана C чокуларын түз сызык аркылуу бириктирсек, ал төрт бурчтук ABC жана ADC эки үч бурчтукка бөлүнөт. Ар биринин аянттарын таап кошсок, берилген төрт бурчтуктун аянтын табабыз.

а) Адегенде ΔABC нун аянтын (3) боюнча табалы:

$$S_{ABC} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (6-3) & (3-1) \\ (4-3) & (6-1) \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \left[15 - 2 \right] = \frac{13}{2}$$

б) Эми ΔADC нун аянтын эсептейли. Алдыңкы учурдагыдай эле A ны биринчи, C ны үчүнчү, ал эми D ны экинчи чекит деп эсептейли, анда (3) боюнча:

$$S_{ADC} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (5-3) & (-2,-1) \\ (4-3) & (6-1) \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \left[10 + 3 \right] = \frac{13}{2}.$$

Демек, берилген төрт бурчтуктун аянты ушул эки үч бурчтуктун аянттарынын суммасына, б. а. $S_0 = 13$ *бирдикке* барабар.

3. Чокулары: $A\ (0,\ 0)$, $B\ (6,\ -4)$ жана $C\ (-2,\ -4)$ болушкан үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.

Бул сапар аянтты ($3a$) формуласы боюнча эсептейбиз, анткени A чокусу координаталар башталмасында жатат:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \left[8 + 24 \right] = 16\ \textit{бирд.}$$

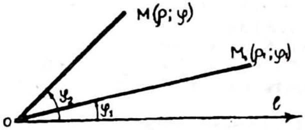
§ 5. Уюлдук координаталар системасы

Тегиздикте каалагандай O чекитин алып, ал аркылуу горизонталь Ol огун жүргүзөбүз. Ал O чекитин *уюл* деп атап, андан оң багытты көздөй багытталган Ol огун — уюлдук ок деп атайбыз. O уюлу, Ol огу берилип, e масштаб бирдиги белгиленсе, ал тегиздиктеги *уюлдук координаталар системасы* деп аталат.

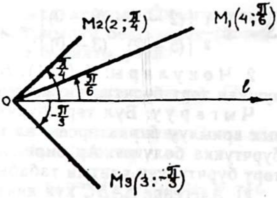
Тегиздиктеги каалагандай чекиттин, уюлдук координаталар системасына карата абалын дайыма толук аныктоого болот.

Тегиздиктин каалагандай M чекитинин уюлдук ρ радиусу деп, O уюлунан ошол чекитке чейинки аралыкты, б. а. OM кесиндисинин узундугун айтышат. Ol уюлдук огу менен OM уюлдук радиустун арасындагы бурчту M чекитинин *уюлдук φ бурчу* деп аташат. Мында φ нин $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ маанисин уюлдук бурчтун башкы мааниси деп аташат.

ρ жана φ сандарын, б. а. M чекитинин уюлдук радиусу менен уюлдук бурчун ошол чекиттин *уюлдук координаталары* деп аташат да, аны $M\ (\rho,\ \varphi)$ деп белгилешет (мында биринчи орунга уюлдук радиус, экинчи орунга уюлдук бурч жазылаарын эске тутуп коюш керек).



5-чийме



6-чийме

Мына ошентип, тегиздиктин каалагандай M чекитине, O уюлунан M ге чейинки $\rho>0$ саны жана Ol ден OM ге чейинки φ бурчу туура келет. Тескерисинче, эгерде ρ_1 жана φ_1 уюлдук координаталары мурдатан белгилүү болсо, анда ага тегиздикте жаткан жалгыз гана $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ чекити туура келет. Бул чекитти аныктоо үчүн Ol огу менен φ_1 бурчун түзгөн Ol_1 шооласын түзүп, O уюлунан баштап $\rho_1>0$ аралыкты ченеп коюш керек. Ошол ρ_1 дин акыркы учу $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ чекитин берет (5-чийме).

Эгерде $\rho=0$ болсо, анда $M(O, \varphi)$ чекити O уюлу менен дал келишет.

Ар бир $M(\rho, \varphi)$ чекитинин φ уюлдук бурчу чынында көп маанилүү, анткени OM кесиндиси O уюлунун айланасында сааттын стрелкасынын багыты боюнча, же ага карама-каршы багыт боюнча бир нече жолу айлангандан кийин дагы $M(\rho, \varphi)$ чекитинин абалына келиши ыктымал. Мына ошондуктан φ уюлдук бурчун жалпы учурда $\varphi+2\pi k$ (мында $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$) түрүндө жазуу талап кылынат. Иш жүзүндө көбүнчө φ нин $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ болгон башкы мааниси гана алынат.

Эгерде φ терс болсо, анда аны Ol огунан баштап, сааттын жебелеринин кыймылынын багыты боюнча ченеп коюш керек.

Мисал. Уюлдук координаталар системасында берилген

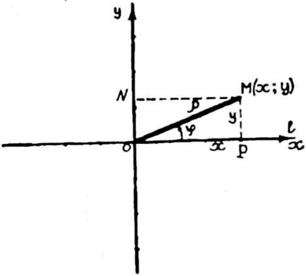
$$M_1\left(4, \frac{\pi}{6}\right),\ M_2\left(2, \frac{\pi}{4}\right) \text{ жана } M_3\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$$

чекиттерин түзгүлө.

Т ү з ү ү. 1) O уюлу аркылуу горизонталь багыт боюнча Ol уюлдук огун жүргүзөбүз. O уюлунан Ol огуна $\frac{\pi}{6}=30°$ -тук бурч боюнча шоола жүргүзөбүз. Ошол шооланы бойлото O уюлунан $\rho=4$ бирдикти ченеп коюп, $M_1\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ чекитине ээ болобуз (6-чийме). Калган эки чекит да ушул сыяктуу эле түзүлөт (6-чийме).

§ 6. Тик бурчтуу жана уюлдук координаталар арасындагы байланыш

Иш жүзүндө, кээде чекиттердин тик бурчтуу декарттык жана уюлдук координаталарынан бир эле мезгилде пайдаланууга туура келет. Мына ошондуктан бул эки координаталардын арасындагы байланышты табуу зарылчылыгы келип чыгат. Ушул максат менен уюлдук координаталардын уюлун декарттык тик бурчтуу координаталардын башталышы менен, ал эми уюлдук окту абсцисса огу менен дал келиштиребиз.



7-чийме

Эми тегиздиктин каалагандай (уюл менен дал келишпеген) M чекитин алабыз, анын декарттык координаталары x, y болуп, уюлдук координаталары ρ, φ болсун (7-чийме). Мындагы OMP тик бурчтуу үч бурчтугунан:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi. \tag{1}$$

Мына ушул (1) формулалар M чекитинин тик бурчтуу декарттык координаталарын анын уюлдук координаталары аркылуу туюнтат. Экинчи жактан ошол эле OMP тик бурчтуу үч бурчтугунан:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \text{ жана } \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

же

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \tag{2}$$

формулаларына ээ болобуз. Бул (2) формулалар M чекитинин уюлдук координаталарын анын декарттык координаталары аркылуу туюнтат. Мына ошентип бул (1) жана (2) формулалар чекиттин уюлдук жана декарттык координаталарынын биринен экинчисине өтүүчү формулалар болуп саналат.

М и с а л д а р: 1. Декарттык координаталар системасында берилген $M(4, 2)$ чекитинин уюлдук координаталарын аныктагыла.

Ч ы г а р у у. Бул чекит үчүн $x=4$, $y=2$ болгондуктан ρ жана φ ни (2) формуладан аныктайбыз:

$$\rho=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx \frac{\pi}{6}, \qquad M\left(2\sqrt{5}, \frac{\pi}{6}\right).$$

2. Уюлдук координаталар системасында берилген $M\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ чекитинин декарттык координаталарын аныктагыла.

Ч ы г а р у у. Мында $\rho = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ болгондуктан, x жана y ти (1) формуладан табабыз:

$$x = 3 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 0 = 0, \quad y = 3 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Демек, $M(0, 3)$ чекити $OУ$ огунда жатат.

§ 7. Координаталарды өзгөртүп туюнтуу

1. Тик бурчтуу координаталар системасын параллель жылдыруу. Башталмасы O чекити болгон xOy координаталар системасы берилсин. Анын Ox жана Oy окторунун багыттары өзгөрбөгөн бойдон калып, башталышы O дон айырмалуу болгон O' чекитине көчүрүлсүн (8-чийме). Эки системада тең эле бир масштаб алынсын. Ал O' чекитинин координаталары a жана b болсун. Бул учурда $x'O'y'$ жаңы координаталар системасы xOy эски координаталар системасын параллель көчүрүүдөн келип чыкты дешет.

Эми тегиздиктин каалагандай M чекитин алабыз, анын xOy системадагы координаталары x, y, ал эми $x'O'y'$ системасындагы координаталары x', y' болсун. Ал M чекитин эски жана жаңы координаталар системаларынын окторуна проекциялайбыз, алардын проекциялары P, Q жана P', Q' болсун. Мында $x = OP$, $y = OQ$, $x' = O'P'$, $y' = O'Q'$. Жаңы O' башталмасынын окторго түшүрүлгөн проекцияларын A жана B аркылуу белгилесек:

$$OP = OA + AP \text{ жана } OQ = OB + BQ$$

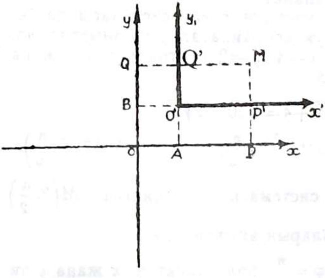
болору ачык көрүнүп турат. Мында $OP = x$, $OA = a$, $AP = O'P' = x'$ жана $OQ = y$, $OB = b$, $BQ = O'Q' = y'$ экендигин эске алсак:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b \tag{1}$$

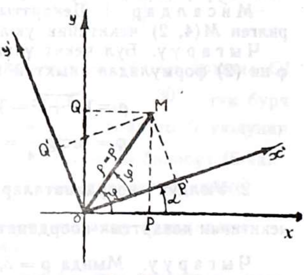
формулаларына ээ болобуз. Бул (1) формула M чекитинин эски координаталарын анын жаңы координаталары аркылуу туюнтат.

Эгер (1) ден x' жана y' ти аныктасак:

$$x' = x - a, \quad y' = y - b \tag{2}$$



8-чийме



9-чийме

формуласына ээ болобуз, бул (2) формула M чекитинин жаңы координаталарын анын эски координаталары аркылуу туюнтат. *Бул (1) жана (2) формулалар координаталар системаларын параллель жылдыруу формулалары деп аталат.*

2. **Декарттык координаталар системасынын окторун буруу.** Эми жалпы башталмасы бар xOy жана $x'Oy'$ декарттык эки координаталар системасы берилип, алардын $x'Oy'$ системасынын октору xOy системасынын окторуна карата α бурчуна бурулуп коюлсун. Мында $x'Oy'$ жаңы системасы xOy эски системасына O координаталар башталмасынын айланасында α бурчуна бурганда келип чыкты деп айтабыз.

Тегиздиктин каалагандай M чекитин алалык, анын эски xOy системадагы координаталары x, y болуп, ал эми жаңы $x'Oy'$ системадагы координаталары x', y' болсун (9-чийме).

Мында

$$OP=x,\ OQ=y,\ OP'=x',\ OQ'=y'.$$

Эми жалпы O уюлдуу, OP жана OP' уюлдук окту, бирдей масштабдуу уюлдук эки система алабыз, алар ирети менен Ox жана Ox' октору боюнча багытталсын. M чекитинин ушул уюлдук системалардагы координаталары ρ, φ жана ρ', φ' болсун. Жогоруда айтылгандай OP' октуу уюлдук система огу OP болгон системаны α бурчуна бурганда келип чыгат, ошондуктан $\rho=\rho'$, $\varphi=\varphi'+\alpha$ болот.

Уюлдук координаталардан декарттык координаталарга өтүүчү формуладан пайдаланабыз:

$$\begin{aligned} x&=\rho\cos\varphi,\ x'=\rho'\cos\varphi' \\ y&=\rho\sin\varphi,\ y'=\rho'\sin\varphi'. \end{aligned} \tag{3}$$

Мында $\rho=\rho'$, $\varphi=\varphi'+\alpha$ болгондуктан (1) ден:

$$x=\rho\cos(\varphi'+\alpha)=\rho(\cos\varphi'\cos\alpha-\sin\varphi'\sin\alpha)=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$$
$$y=\rho\sin(\varphi'+\alpha)=\rho(\sin\varphi'\cos\alpha+\cos\varphi'\sin\alpha)=y'\cos\alpha+x'\sin\alpha.$$

Демек, акырында

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y&=y'\cos\alpha+x'\sin\alpha \end{aligned} \tag{4}$$

формулага ээ болобуз. Бул (4) формула M чекитинин эски координаталарын жаңылары аркылуу туюнтат.

Ал эми xOy системасынын өзүн $x'Oy'$ системасынан, аны $-\alpha$ бурчуна бурганда келип чыгат, ошондуктан x', y' координаталарын x, y аркылуу туюнтуу үчүн (4) дөгү α ны $-\alpha$ га алмаштыруу жетиштүү болот:

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \\ y'&=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

Бул (4) жана (5) формулаларды *координаталар окторун буруу формулалары деп аташат.*

3. Декарттык координаталар системасынын башталмасын өзгөртүү жана окторун буруу. Бизге декарттык xOy координаталар системасы берилсин. Анын O башталмасын каалагандай O' чекитине көчүрүп, окторун α бурчуна буруу талап кылынсын. Бул ишти эки ирет өзгөртүү аркылуу аткарууга болот.

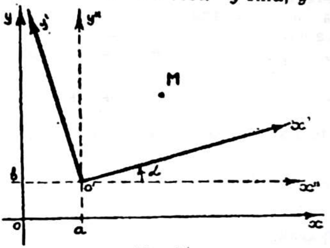
Эң мурда xOy координаталар системасынын окторун параллель бойдон калтырып, O башталмасын, эски системага карата координаталары a жана b болгон O' чекитине көчүрөбүз, анда $x''O'y''$ жаңы системасы келип чыгат. Тегиздиктин каалагандай M чекитинин x, y эски координаталары x'', y'' жаңы координаталар аркылуу (2) формулалар боюнча:

$$x=x''+a,\ y=y''+b \tag{1a}$$

түрүндө туюнтулат.

Эми $x''O'y''$ координаталар системасынын O' башталмасын өзгөртүүсүз калтырып, анын окторун $O'x''$ ке карата α бурчуна бурабыз, анда $x'O'y'$ жаңы системасы пайда болот да, x'' жана y'' координаталары x' жана y' аркылуу (4) боюнча:

$$x''=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\ y''=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \tag{4a}$$



10-чийме

түрүндө туюнтулат. Буларды (1a) га коюп:

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+a\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+b \end{aligned} \tag{6}$$

формулаларына ээ болобуз.

Бул формулалар, координаталар системасынын башталыштары көчүрүлүп, октору бурулган учурда M чекитинин эски координаталарын анын жаңы координаталары аркылуу туюнтат. Ушул эле өзгөртүүдө x', y' жаңы координаталарды M чекитинин x, y эски координаталары аркылуу туюнтуу үчүн (6) системаны x', y' ке карата чыгаруу керек. Анда

$$\begin{aligned} x'&=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha,\\ y'&=-(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha \end{aligned} \tag{7}$$

формулалары келип чыгат.

Мына ушул (6) жана (7) формулалар координаталар системасын өзгөртүп түзүүнүн жалпы учурундагы формуласы деп аталат.

Бул формулалардан, $\alpha=0$ болгондо (1), (2) формулалар жана $a=b=0$ болгондо (4), (5) формулалар келип чыгат.

Мисал. xOy эски системасындагы координаталары $x=-1$, $y=3$ болгон $M(-1, 3)$ чекити берилген. Ушул чекиттин, эски системанын башталышын $O'(2, 3)$ чекитине көчүрүп, окторун $+\frac{\pi}{6}$ бурчуна бурган кезде пайда болуучу $x'O'y'$ координаталар системасындагы жаңы координаталарын аныктагыла.

Чыгаруу. Шарт боюнча $a=2$, $b=3$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$ болгондуктан (7) формуладан

$$x'=(x-2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(y-3)\cdot\frac{1}{2}\quad y'=-(x-2)\cdot\frac{1}{2}+(y-3)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

табылат. Буларга $x=-1$, $y=3$ деп коюп, M чекитининн жаңы координаталары: $x'=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y'=\frac{3}{2}$ экендигин аныктайбыз. Ошентип жаңы $x'O'y'$ системасына карата $M\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ чекитине ээ болобуз.

Маселенин шартында айтылгандай M чекитин, эски жана жаңы координаталар системаларын түзсөңөр буга толук ынанасыңар.

§ 8. Тегиздиктеги сызыктын теңдемелери

Геометриялык фигураларды алгебранын жардамы менен изилдей турган математиканын бөлүмү *аналитикалык геометрия* деп аталат. Координаталарды ушул максатта колдонуу *координаталар методу* деп аталат.

Аналитикалык геометрияда негизинен сызыктын теңдемесин түзүү жана аны теңдемеси боюнча изилдөө каралат. Сызыктын теңдемесин түзүү үчүн кандайдыр координаталар системасы тандалып алынат, андан кийин сызыктан каалагандай $M(x, y)$ чекитин белгилеп, ал сызыктын белгилүү касиетинен пайдаланып өзгөрмөлүү координаталарды байланыштыруучу барабардыкты жазышат.

Эгерде тегиздиктеги каалагандай чекиттин декарттык координаталарын x, y десек, аларды бири бири менен байланыштыруучу туюнтма $F(x, y)$ аркылуу белгиленет, $F(x, y)=0$ болсо теңдеме деп аталат.

Аныктама. *Эгерде L сызыгынын каалагандай чекитинин координаталары*

$$F(x, y)=0 \tag{1}$$

теңдемесин канааттандырса, ал эми ошол ийри сызыкта жатпаган чекиттердин координаталары бул теңдемени канааттандырбаса, анда (1) теңдеме L сызыгынын теңдемеси деп аталат.

Бул аныктама боюнча, L сызыгынын теңдемеси ушул сызыктын чекиттеринин координаталарын байланыштыруучу $F(x, y)=0$ болуп саналат.

Мисалдар. 1. Радиусу R, борбору $O(a, b)$ болгон айлана деп, O дон R аралыкта туруучу чекиттердин геометриялык ордун айтарыбыз белгилүү. Анда айлананын ар бир чекитинен O борборуна чейинки аралык дайыма R ге барабар болууга тийиш. Ошондуктан айлананын каалагандай $M(x, y)$ чекитинен $O(a, b)$ борборуна чейинки $OM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ аралыкты R ге барабарлап, эки жагын тең квадратка көтөрсөк төмөндөгүдөй теңдемеге ээ болобуз:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2)$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0. \qquad (2a)$$

Айлананын ичинде жаткан N чекиттер үчүн $ON<R$ болуп, сыртында жаткан P чекиттер үчүн $OP>R$ болуп, ал аралыктарды таап ордуна коюп квадратка көтөрсөк (2) деги барабардык белгинин ордуна $<$ же $>$ орундалат, б. а. ал чекиттердин координаталары (1) теңдемени канааттандырбайт. Мына ошентип, (1) теңдемени айланада жаткан гана чекиттердин координаталары канааттандырат, ал эми айланада жатпаган эч бир чекиттин координаталары ал теңдемени канааттандырбайт. Ошондуктан (2) теңдеме мисалда аталган айлананын теңдемеси болот.

Эскертүү. Эгерде айлананын борбору $O(0, 0)$ координаталар башталмасы менен дал келсе (б. а. $a=0$, $b=0$ болсо), анда R радиустуу айлананын теңдемеси

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (3)$$

түрүндө болот.

2. Эми $A(-1, -2)$ жана $B(2, 3)$ чекиттеринин арасындагы кесиндини тең экиге бөлө турган жана ага перпендикуляр болгон сызыктын теңдемесин түзүү керек болсун.

Изделген сызыкты A жана B чекиттеринен бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин геометриялык орду деп кароого болот. $N(x, y)$ ал сызыктын каалагандай чекити болсун десек, анда

$$AN=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2} \text{ жана } BN=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

болору белгилүү. Буларды барабарлап, эки жагын квадратка көтөрүп, жөнөкөйлөтсөк төмөндөгүдөй (4) теңдемеге келебиз:

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

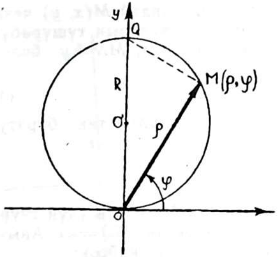
$$(x+1)^2+(y+)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$$

$$3x+5y-4=0. \qquad (4)$$

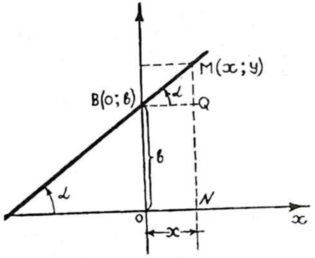
Түз сызыктын каалагандай $N(x, y)$ чекитинин координаталары ушул теңдемени канааттандырат. Эгерде $P(x, y)$ чекити ал түз сызыкта жатпаса, анда же $AP>BP$, же $AP<BP$ болот да, эки учурунда тең P чекитинин координаталары (4) теңдемени канааттандырбайт. Мына ошондуктан, аныктама боюнча (4) теңдеме ушул мисалда аталган түз сызыктын теңдемеси болот.

Уюлдук координаталар системасындагы сызыктын теңдемеси дагы ушул сыяктуу эле аныкталат.

***Аныктама.** Эгерде кандайдыр бир K сызыгынын чекиттеринин координаталары $F(\rho, \varphi)=0$ теңдемесин канааттандырып, ал сызыкта жатпаган чекиттердин координаталары бул теңдемени канааттандырбаса, анда $F(\rho, \varphi)=0$ теңдемеси K сызыгынын теңдемеси деп аталат.*



11-чийме



12-чийме

Мисал. Борбору $O^1(O, R)$ чекити болуп уюл аркылуу өтүүчү айлананын теңдемесин түзүү керек болсун (11-чийме). Теңдемесин түзүү керек болгон айлананын каалагандай $M(\rho, \varphi)$ чекитин алабыз. Ал чекиттен, айлана менен Oy огу кесилишкен Q чекитине MQ хордасын жүргүзөбүз. Мындагы OQM үч бурчтугу тик бурчтуу, анын QOM бурчу $\frac{\pi}{2}-\varphi$ ге барабар. Мына ошол OQM үч бурчтугунан: $\rho = 2R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ же $\rho = 2R\sin\varphi$ болот. Айланада жатпаган эч бир чекиттин координаталары бул теңдемени канааттандырбайт, аны айланадагы чекиттердин координаталары гана канааттандырат. Ошондуктан,

$$\rho = 2R\sin\varphi \text{ же } \rho - 2R\sin\varphi = 0 \tag{5}$$

теңдеме берилген айлананын теңдемеси болот.

II глава. ТЕГИЗДИКТЕГИ ТҮЗ СЫЗЫКТАРДЫН ТЕҢДЕМЕЛЕРИ

Тегиздиктеги түз сызыктардын теңдемелерин, алардын координаталар окторуна карата жайгашууларына жараша түрдүүчө жол менен түзүүгө болот. Аларга айрым-айрым токтолобуз.

§1. Бурчтук коэффициенти аркылуу берилген түз сызыктын теңдемеси

Координаталар окторуна параллель болбой, аларды кесип өтө турган түз сызык берилсин. Ал түз сызык Ox огунун оң багыты менен α бурчун түзүп, Oy огун $B(0, b)$ чекитинде кесип өтсүн (12-чийме). Мына ушул түз сызыктын теңдемесин түзүү талап кылынсын.

Түз сызыктын абалы α жана b эки чоңдугу аркылуу толук аныкталат. Мында α бурчунун өзүн эмес, анын тангенсин: $k = \operatorname{tg}\alpha$ ны пайдалануу ыңгайлуу. Ал $k = \operatorname{tg}\alpha$ түз сызыктын бурчтук коэффициенти деп аталат.

Эми мына ошол k жана b лар аркылуу түз сызыктын теңдемесин түзүүгө киришебиз.

Ушул максат менен түз сызыктын каалагандай $M(x, y)$ чекитин алабыз да, андан Ox огуна MN перпендикулярын түшүрөбүз. Мында 12-чиймеден көрүнүп тургандай $ON=x$, $MN=y$ болот. Ошол эле 12-чиймеден

$$y=MN=MQ+QN \tag{1}$$

экендигин байкайбыз. Мында $QN=b$. Андагы BMQ тик бурчтуу үч бурчтугунан:

$$\frac{MQ}{BQ}=\operatorname{tg}\alpha, \quad MQ=BQ\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Бул барабардыктар түз сызыктын каалаган M чекити үчүн туура болот. Ал эми $BQ=ON=x$, $\operatorname{tg}\alpha=k$ болгондуктан: $MQ=kx$. Аныкталган MQ менен QN дин бул маанилерин (1) ге койсок:

$$y=kx+b \tag{2}$$

теңдемесине ээ болобуз.

Бул теңдемени түз сызыктагы ар бир чекиттин координаталары канааттандырат. Түз сызыкта жатпаган эч бир чекиттин координаталары ал теңдемени канааттандырбайт. Ошондуктан (2) теңдеме берилген түз сызыктын теңдемеси болот. Аны *бурчтук коэффициенттүү түз сызыктын теңдемеси* деп аташат.

Түз сызыктын бул теңдемесине x жана y координаталары биринчи гана даражада катышарын белгилей кетебиз. Мына ушуга байланыштуу түз сызыкты *биринчи тартиптеги сызык* деп аташат.

Эгерде $b=0$ болсо, б. а. түз сызык координаталар башталмасы аркылуу өтсө, анда анын теңдемеси: $y=k\cdot x$ түрүнө келет.

Түз сызыктын (2) теңдемеси, ал түз сызык координаталар окторуна параллель болбогон учур үчүн чыгарылды. Түз сызык координата окторуна параллель болсо, анын теңдемелери башкача түргө келет.

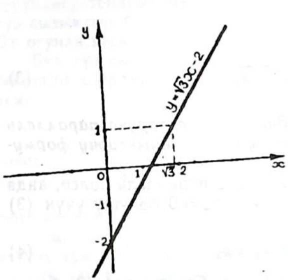
Эгерде $k=0$ болсо, б. а. $\varphi=0$ болуп, түз сызык Ox огуна параллель болсо, анда анын теңдемеси $y=b$ болору (2) теңдемеден келип чыгат.

Эгерде түз сызык Oy огуна параллель болсо, анда $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $k=\operatorname{tg}\alpha=\infty$ болуп, (2) теңдеме маанисин жоготот. Бирок да Oy огуна параллель болгон түз сызыкты Oy огунан бирдей a аралыкта турган чекиттердин геометриялык орду деп кароого болгондуктан, анын теңдемесин $x=a$ түрүндө жазууга болот.

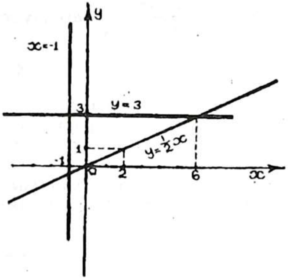
Мисалдар: 1. $y=\sqrt{3}\cdot x-2$ теңдемеси менен берилген түз сызыкты түзгүлө.

Түз сызыкты түзүү үчүн, анын эки чекитин аныктоо жетиштүү болот. Алсак, $x=0$ болсо, $y=-2$, $x=\sqrt{3}$ болсо, $y=1$ болот. Демек, берилген түз сызык Oy огун $B(0, -2)$ чекитинде кесип өтүп (анткени $b=-2$), $M(\sqrt{3}, 1)$ чекити аркылуу өтөт. Бул эки чекитти бириктирип изделген түз сызыкка ээ болобуз (13-чийме).

Экинчи жактан $k=\sqrt{3}$, б. а. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$ болгондуктан $\alpha=\frac{\pi}{3}$ бо-



13-чийме



14-чийме

лору белгилүү. Түзүлгөн түз сызык Ox огу менен $\alpha=60^\circ$ тук бурч түзөрүн ченөөлөр көрсөтөт.

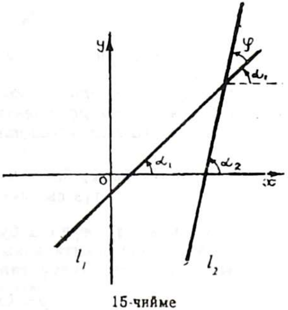
2. $y=3$ жана $x=-1$ түз сызыктарын түзгүлө.

Булардын биринчиси Oy огун $y=3$ чекитинде кесип өтүп, Ox огуна параллель болгон түз сызык, экинчиси Ox огун $x=-1$ чекитинде кесип өтүп, Oy огуна параллель болгон түз сызык экендигин байкоо кыйын эмес. Алар 14-чиймеде көрсөтүлгөн.

3. $y=\frac{1}{2}x$ түз сызыгын түзгүлө. Бул түз сызык координаталар башталмасы аркылуу өткөндүктөн, аны түзүү үчүн ошол түз сызыкта жатуучу дагы бир чекитти табуу жетиштүү болот. Алсак, $x=2$ болсо, $y=1$ болуп, түзүлүүчү түз сызык $M(2, 1)$ чекити аркылуу өтөөрүн байкайбыз (14-чийме).

§ 2. Эки түз сызыктын арасындагы бурч

Координаталар окторуна параллель болбогон, бурчтук коэффициенттүү эки түз сызык: $y=k_1x+b_1$ жана $y=k_2x+b_2$ теңдемелери менен берилсин, мында $k_1=tg\,\alpha_1$, $k_2=tg\,\alpha_2$ болсун (15-чийме).



15-чийме

Мына ушул теңдемелер менен аныкталган l_1 жана l_2 түз сызыктарынын арасындагы φ бурчун аныктоо керек болсун. 15-чийме боюнча $\alpha_2=\alpha_1+\varphi$, $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ экендиги ачык көрүнүп турат. Мына ошондуктан эгерде $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$ болбосо, анда $tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)$.

$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2}$ болгондуктан

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1} \qquad (3)$$

формуласына ээ болобуз.

Мына ушул (3) формула, *координаталар окторуна параллель болбогон эки түз сызыктын арасындагы бурчту аныктоочу формула* болуп саналат.

Эгерде l_1 жана l_2 түз сызыктары өз ара параллель болсо, анда $\varphi=0$ жана $\operatorname{tg}\varphi=0$ болору ачык. Ал эми $\operatorname{tg}\varphi=0$ болушу үчүн (3) боюнча

$$k_2-k_1=0 \text{ же } k_1=k_2 \qquad (4)$$

болуусу тийиш, тескерисинче, эгерде $k_1=k_2$ болсо, анда (3) боюнча $\operatorname{tg}\varphi=0$ жана $\varphi=0$ болуп, l_1 жана l_2 түз сызыктары өз ара параллель болушат. Мына ошентип, (4) барабардык (2) түрүндө берилген *эки түз сызыктардын параллелдик шарты* болуп саналат.

Бул шартты кыскача: *эгерде $k_1=k_2$ болсо, анда эки түз сызык параллель болот, тескерисинче, эгерде эки түз сызык параллель болсо, анда алардын бурчтук коэффициенттери барабар болот деп айтууга болот.*

Ал эми эгерде эки түз сызык бири-бирине перпендикуляр болсо, б. а.

$$\varphi=\frac{\pi}{2} \text{ болсо, анда } \alpha_2=\frac{\pi}{2}+\alpha_1, \operatorname{tg}\alpha_2=-\operatorname{ctg}\alpha_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1},$$

б. а. $k_2=-\frac{1}{k_1}$ болот. Бул шарт (3) барабардыктан дагы келип чыгат, чындыгында $\operatorname{tg}\alpha=\infty$ болушу үчүн, (3) боюнча бөлчөктүн бөлүмү нөлгө барабар болушу тийиш, демек $1+k_2k_1=0$ дөн $k_2=-\frac{1}{k_1}$ келип чыгат. Ошентип,

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \qquad (5)$$

шарты, l_1 жана l_2 эки түз сызыктын перпендикулярдык шарты болуп саналат.

Кыскача: *эгерде эки түз сызык перпендикуляр болушса, анда алардын бурчтук коэффициенттери чоңдуктары боюнча тескери, белгилери боюнча карама-каршы болот деп айтууга болот.*

§ 3. Белгилүү багыт боюнча берилген чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси

l түз сызыгы Ox огуна α бурчу боюнча жантайып, мурдатан берилген $M_1(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өтсүн дейлик. Мына ушул түз сызыктын теңдемесин түзүү талап кылынсын. Мындай түз сызык

$$y=kx+b \qquad (2)$$

түрүндөгү теңдеме менен аныкталары белгилүү, мында k ушул түз сызыктын бурчтук коэффициенти. b болсо, ал түз сызыктын Oy огунан кесип өткөн кесиндиси.

Бул түз сызык $M_1(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өткөндүктөн, ал чекиттин координаталары ушул (2) теңдемесин канааттандырат, демек,

$$y_1 = kx_1 + b \tag{2a}$$

болот. Мындагы (2) ден (2a) ны кемитип:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{6}$$

теңдемесине ээ болобуз.

Мына ушул (6) теңдеме, берилген $M_1(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси болуп саналат.

Эгерде k — берилген сан болсо, анда (6) теңдеме, белгилүү бир түз сызыктын теңдемеси болот. Эгерде k өзгөрмө параметр болсо, анда (6) теңдеме $M_1(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктардын таңгагынын теңдемеси болот, мында k ошол таңгактын параметри деп аталат.

Мисалдар. 1. $M_1(-1, 2)$ чекити аркылуу өтүп, $y=x-1$ түз сызыгына параллель болгон түз сызыктын теңдемесин түзгүлө.

Эң мурда (6) боюнча: $y-2=k(x+1)$ теңдемесин жазып алабыз. Бул M_1 чекити аркылуу өткөн таңгактын (чексиз көп сызыктардын) теңдемеси болот. Алардын ичинен керектүүсүн бөлүп алуу үчүн кошумча шарттан, б. а. $y=x-1$ түз сызыгына параллель деген шарттан пайдаланабыз. Кийинки түз сызык үчүн $k_1=1$ болгондуктан, изделген түз сызык үчүн дагы $k=1$ болот, демек, анын теңдемеси $y-2=x+1$ же $y=x+3$ болот.

2. $M_1(2, 1)$ чекити аркылуу өтүп, $y=-4x-3$ түз сызыгына перпендикуляр болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

Бул сапар дагы, адегенде (6) боюнча берилген M_1 чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин жазабыз: $y-1=k(x-2)$. Эми бул түз сызыктын $y=-4x-3$ түз сызыгына перпендикулярдык шартынан пайдаланабыз. Кийинки түз сызык үчүн $k_1=-4$ болгондуктан изделген түз сызык үчүн $k = +\frac{1}{4}$ болот, демек анын теңдемеси:

$$y - 1 = \frac{1}{4}(x - 2) \text{ же } y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Жогорудагы 1- жана 2-мисалдагы түз сызыктарды түзүп чыксаңар, 1-мисалдагы эки түз сызык өз ара параллель, ал эми 2-мисалдагы эки түз сызык өз ара перпендикуляр экендигине ынанасыңар.

§ 4. Берилген эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси

Геометриянын мектептик курсунан, өз ара дал келишпеген эки чекит аркылуу бир гана түз сызык жүргүзүүгө болорун билебиз. Мына ошондой $M_1(x_1, y_1)$ жана $M_2(x_2, y_2)$ эки чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин жазуу талап кылынсын. Бул түз сызык координаталар окторуна параллель болбосун, б. а. $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ болсун дейлик.

Эң мурда $M(x_1, y_1)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин жазабыз. Анын теңдемеси:

$$y-y_1=k(x-x_1) \tag{6}$$

болорун билебиз.

Бул түз сызык $M_2(x_2, y_2)$ экинчи чекит аркылуу дагы өтүүгө тийиш болгондуктан, ал чекиттин координаталары (6) теңдемени да канааттандырууга тийиш, демек

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1)$$

болуп, мындан

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{7}$$

экендигин аныктайбыз.

k нын ушул маанисин (6) теңдемеге коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{8}$$

Бул теңдемени пропорция түрүндө жазып, эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{9}$$

теңдемесине келебиз.

Мисал. $M_1(-2, 3)$ жана $M_2(4, -1)$ эки чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

Мында M_1 ди биринчи чекит, M_2 ни экинчи чекит десек: $x_1=-2$, $y_1=3$, $x_2=4$, $y_2=-1$ болот. Ошондуктан (9) боюнча:

$$\frac{y-3}{-1-3}=\frac{x+2}{4+2} \text{ же } y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

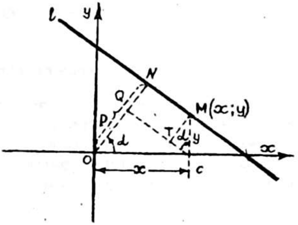
теңдемесине ээ болобуз. Бул түз сызыкты түзсөңөр, ал чынында эле $M_1(-2, 3)$ жана $M_2(4, -1)$ эки чекити аркылуу өтөрүнө ынанарсыңар.

§ 5. Түз сызыктын нормалдуу теңдемеси

Каалагандай түз сызыктын абалын координаталар башталмасынан ага түшүрүлгөн перпендикулярдын (нормалдын) $ON=p$ узундугу жана ал перпендикулярдын Ox огунун оң багыты менен түзгөн α бурчу аркылуу толук аныктоого болот. Түз сызыктын p жана α параметрлери аркылуу туюнтулуучу теңдемесин чыгарабыз.

Координаталар окторун кесип өтүүчү l түз сызыгы берилсин. O координаталар башталмасынан ага ON перпендикулярын түшүрөбүз, ал Ox огу менен α бурчун түзсүн. Ошол l түз сызыгынан каалагандай $M(x, y)$ чекитин алып, андан Ox огуна перпендикуляр түшүрөбүз (16-чийме).

Ал перпендикулярдын негизи c болсун. C чекитинен l түз сызыгына параллель түз сызык жүргүзүп, анын ON менен кесилишкен чекитин Q аркылуу белгилейбиз. M ден CQ га перпендикуляр түшүрүп, аны менен QC тин кесилишкен чекитин T аркылуу белгилейбиз. Анда $\angle MCT=\alpha$ болору белгилүү.



16-чийме

Ошол эле 16-чийме боюнча

$$p=ON=OQ+QN=OQ+TM. \tag{10}$$

Андагы OQC тик бурчтуу үч бурчтугунан $OQ=OC\cdot\cos\alpha=x\cos\alpha$ болору ачык.

Ал эми TMC тик бурчтуу үч бурчтугунан $TM=MC\cdot\sin\alpha=$ $=y\sin\alpha$ анткени тиешелүү жактары өз ара перпендикулярдуу болушкандыктан $N\widehat{O}C=T\widehat{C}M=\alpha$.

Мындагы OQ жана TM дердин маанисин (10) га коюп,

$$p=x\cos\alpha+y\sin\alpha$$

же

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{11}$$

теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдеме *l түз сызыгынын нормалдуу теңдемеси* деп аталат.

Бул (11) нормалдык теңдеме l түз сызыгы координаталар окторуна жантайган учуру үчүн чыгарылганы менен, ал l түз сызыгынын тегиздикте каалагандай жайгашкан учуру үчүн дагы орундалат.

Алсак, l түз сызыгы Ox огуна параллель болуп, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ болсо, (11) ден $y=p$ теңдемеси, ал эми Oy огуна параллель болуп, $\alpha=0$ болсо, $x=p$ теңдемеси келип чыгат.

Мисал. Эгерде нормалдын узундугу $p=2$ болуп, анын Ox огуна жантайган бурчу $\alpha=135°$ болсо, алар аныктаган түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

Түз сызыктын (11) нормалдык теңдемесине $\cos\alpha$ жана $\sin\alpha$ катышкандыктан, аларды эсептейбиз. Мында

$$\sin 135° = \sin(90° + 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

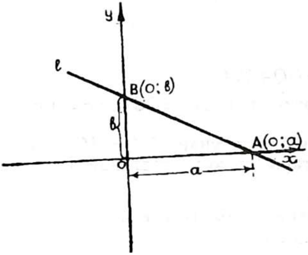
болгондуктан (11) боюнча:

$$x\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2=0;\ x-y+2\sqrt{2}=0$$

нормалдык же $y=x+2\sqrt{2}$ бурчтук коэффициенттүү теңдемеге ээ болобуз.

§ 6. Түз сызыктын кесиндилер аркылуу берилген теңдемеси

Декарттык координаталар системасынын Ox огунан a кесиндисин, Oy огунан b кесиндисин кесип өтүүчү l түз сызыгынын теңдемесин түзүү керек болсун. Анда, бул түз сызыкты $A(a, 0)$ жана $B(0, b)$ чекиттери аркылуу өтүүчү сызык деп кароого болот (17-чийме). Ал эми (9) формуладан пайдалансак:



17-чийме

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a} \text{ же } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (12)$$

теңдемесине ээ болобуз. Мына ушул (12) теңдеме *түз сызыктын кесиндилердеги теңдемеси* деп аталат.

Мисал. Ox огунан $a=-1$, Oy огунан $b=-4$ кесиндисин кесип өтө турган түз сызыктын теңдемесин жазгыла.

Мында (12) боюнча:

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-4}=1$$

нормалдык же $y=-4x-4$ бурчтук коэффициенттүү теңдеме келип чыгат.

§ 7. Түз сызыктын жалпы теңдемеси

Биз жогоруда карап өткөн учурлардын бардыгында түз сызыктын теңдемелери x жана y өзгөрмө чондуктарына карата биринчи даражадагы теңдемелер болгондугуң көрдүк.

Жалпы айтканда, x жана y ке карата биринчи даражадагы ар кандай теңдеме дайыма түз сызыктын теңдемеси болорун көрсөтүүгө болот.

x жана y ке карата биринчи даражадагы жалпы

$$Ax+By+C=0 \quad (13)$$

теңдеме берилсин, мында A, B, C лар турактуу коэффициенттер болушуп, A менен B бир мезгилде нөлгө барабар болушпаса, б. а. $A^2+B^2\neq 0$ болсун.

Ушул (13) формула түз сызыктын теңдемеси боло тургандыгын көрсөтөбүз. Ал үчүн (13) теңдемесин түз сызыктын жогорудагы теңдемелеринин бирине, мисалы, (11) ге келтирүү мүмкүн экендигин көрсөтүү гана жетиштүү болот. Ушул максатта (13) теңдеменин эки жагын тең, азырынча аныкталбаган кандайдыр бир M көбөйтүүчүсүнө көбөйтөбүз:

$$MAx+MBy+MC=0. \qquad (14)$$

Бул (14) теңдеме (13) менен тең күчтө болот, анткени (13) түн чыгарылышы (14) түн да чыгарылышы болот жана тескерисинче (14) түн чыгарылышы (13) түн да чыгарылышы болот. Ошондуктан (13) жана (14) теңдемелери бир эле сызыкты аныкташат.

Азырынча аныкталбаган M көбөйтүүчүсүн, (14) теңдеме түз сызыктын нормалдык теңдемеси болгудай, б. а.

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \qquad (11)$$

орундалгыдай кылып издейбиз. (11) аткарылышы үчүн

$$MA=\cos\alpha,\ MB=\sin\alpha,\ MC=-p \qquad (15)$$

барабардыктары орундалышы тийиш. Булардын биринчи экөөнү квадратка көтөрүп, мүчөлөп кошсок, $M^2(A^2+B^2)=1$ болору ачык. Шарт боюнча $A^2+B^2\neq 0$ болгондуктан,

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (16$$

экендиги келип чыгат.

Мындагы M саны *нормалдоочу көбөйтүүчү* деп аталат. $C\neq 0$ кезинде M дин белгиси C нын белгисине карама-каршы болушу керек, анткени (15) боюнча $MC=-p$, ал эми $p>0$ экендиги белгилүү. Эгер $C=0$ болсо, анда каалаган белгини алууга болот.

Ошентип, (13) тү M нормалдоочу көбөйтүүчүгө көбөйткөндөн кийин, ал түз сызыктын нормалдык теңдемесине келди, демек (13) теңдеме түз сызыктын теңдемеси болот. Ал эми (13) теңдеме биринчи даражадагы эң жалпы теңдеме болгондуктан, түз сызык биринчи тартиптеги сызык болот деген тыянакка келебиз.

Ал (13) теңдеме *түз сызыктын жалпы теңдемеси* деп аталат. Жалпы теңдемени нормалдоочу M көбөйтүүчүгө көбөйткөндөн кийин түз сызыктын

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (14a)$$

нормалдык теңдемесине ээ болобуз. (15) ден

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

болорун байкайбыз, мында $\pm$ белгилеринин ичинен C ныкына карама-каршысы алынат.

Мисал. $3x-4y-20=0$ жалпы теңдемени нормалдык теңдемеге келтиргиле. Мында $A=3$, $B=-4$, $C=-20$ болгондуктан, $M=\frac{1}{+\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}$. Жалпы теңдемени M ге көбөйтүп, $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-4=0$ нормалдык теңдемесине келебиз. Мында $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $p=4$.

§ 8. Түз сызыктын жалпы теңдемесин изилдөө

Эми түз сызыктын $Ax+By+C=0$ (13) жалпы теңдемеси ага катышкан A, B, C коэффициенттеринин түрдүү маанилеринде кандай түрдөгү теңдемелер болорун изилдейбиз.

1) $A\neq0$, $B\neq0$, $C\neq0$ болсун, анда (13) теңдеменин бардык мүчөлөрүн B га бөлүп, y ке карата чыгарсак, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ теңдемесине келебиз. Эгер $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ деп белгилесек, ал $y=kx+b$ түрүнө келип, түз сызыктын бурчтук коэффициенттүү теңдемесине ээ болобуз.

2) $A\neq0$, $B\neq0$, $C=0$ болсо, алдыңкыдан $b=0$ болот да, $y=kx$ келип чыгат, демек, бул учурда түз сызык координаталар башталмасы аркылуу өтөт.

3) $A\neq0$, $C\neq0$, $B=0$ болсо, (13) теңдеме $Ax+C=0$ же $x=-\frac{C}{A}$ болуп, $a=-\frac{C}{A}$ десек, $x=a$ түз сызыгы Oy огуна параллель болот.

4) $A=0$, $B\neq0$, $C\neq0$ болсо, (13) теңдеме $By+C=0$, $y=-\frac{C}{B}$ болуп, $b=-\frac{C}{B}$ десек, $y=b$ болгон Ox огуна параллель түз сызыкка ээ болобуз.

5) $A=0$, $B\neq0$, $C=0$ болсо, (13) теңдеме $y=0$ түрүнө келет. Ox огунда дайыма $y=0$ болгондуктан, бул Ox огунун теңдемеси болот.

6) $A\neq0$, $B=0$, $C=0$ болсо, (13) теңдеме $x=0$ түрүнө келет. Бул Oy огунун теңдемеси болот.

Мына ошентип, бардык учурда тең $Ax+By+C=0$ түз сызыктын гана теңдемеси болот, б. а. чынында эле түз сызыктын жалпы теңдемеси болуп саналат.

Эми жалпы теңдемелери менен берилген эки түз сызыктын параллелдик жана перпендикулярдык шарттарына токтолобуз.

$$Ax+By+C=0, \tag{13}$$
$$A_1x+B_1y+C_1=0 \tag{16}$$

эки түз сызыгы берилсин. Алардын ар бирин y ке карата чыгарып, x тин алдындагы коэффициенттерин $k=-\frac{A}{B}$ жана $k_1=-\frac{A_1}{B_1}$ аркылуу белгилесек, ал (13) жана 16) түз сызыктардын параллелдик шарты $k=k_1$ же

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1} \tag{17}$$

барабардыгы менен туюнтулат. Эгерде $k\neq k_1$ же $\frac{A}{A_1}\neq\frac{B}{B_1}$ болсо, анда берилген түз сызыктар кесилишет.

Бурчтук коэффициенттери менен берилген эки түз сызыктын перпендикулярдык шарты $k_1 = -\frac{1}{k}$ болгондуктан, (13) жана (16) түз сызыктардын перпендикулярдык шарты:

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{1}{-\frac{A}{B}}$$

же

$$AA_1 + BB_1 = 0 \tag{18}$$

барабардыгы болот.

Мисалдар. 1. $2x+3y-7=0$ жана $4x+6y+1=0$ түз сызыктары параллель болушат, анткени $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

2. $6x+4y-5=0$ жана $2x-3y-6=0$ түз сызыктарынын кандай жайгашкандыгын аныктагыла.

Мында $A=6$, $B=4$, $A_1=2$, $B_1=-3$ болот. (18) шартты текшерип көрөлү: $AA_1+BB_1=6\cdot 2+4\cdot(-3)=0$. Демек, бул түз сызыктар өз ара перпендикуляр.

Эгерде $Ax+By+C=0$ (13) теңдемесинде A менен B ны өзгөрүүсүз калтырып, C га түрлүү маанилер берсек, анда бир эле $k=-\frac{A}{B}$ бурч коэффициенттүү, мүмкүн болгон бардык параллель түз сызыктарга ээ болобуз.

Ал эми бизге $M_1(x_1, y_1)$ чекити берилип, $C=-Ax_1-By_1$ болсун десек, анда биз

$$Ax+By-Ax_1-By_1=0. \tag{19}$$

же

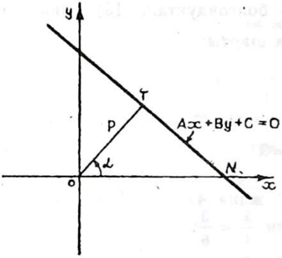
$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \tag{19'}$$

түз сызыгына ээ болобуз. Бул болсо M_1 чекити аркылуу өтүүчү жана (13) түз сызыкка параллель болгон түз сызыктын теңдемеси болот.

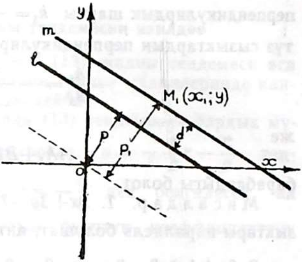
§ 9. Чекиттен түз сызыкка чейинки аралык

Эми координаталар башталмасынан (13) түз сызыкка чейинки аралыкты табуу керек болсун. Ушул максат менен координаталар башталмасынан ошол (13) түз сызыкка перпендикуляр түшүрөбүз, анда ал перпендикулярдын p узундугу координаталар башталмасынан $Ax+By+C=0$ түз сызыгына чейинки аралык болот (18-чийме).

OT перпендикуляры Ox огуна α бурчу боюнча жантайсын. $Ax+By+C=0$ түз сызыгы менен октордун кесилишкен чекиттери $M\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ жана $N\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ болору белгилүү, демек $ON=-\frac{C}{A}$, $OM=-\frac{C}{B}$. 18-чиймедеги OMT жана OTN тик бурчтуу үч бурчтуктарынан $p=-\frac{C}{B}\sin\alpha$, $p=-\frac{C}{A}\cos\alpha$ болору белгилүү. Булар-



18-чийме



19-чийме

дан $pB = -C\sin\alpha$, $pA = -C\cos\alpha$. Эки жагын тең квадратка көтөрүп, мүчөлөп кошсок: $p^2(A^2+B^2) = C^2$ же

$$p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \tag{20}$$

формуласына келебиз. Координаталар башталмасынан $Ax+By+C=0$ түз сызыгына чейинки аралык мына ушул (20) формула менен аныкталат.

Мында дайыма $p>0$ болгондуктан, радикалдын сыртындагы C нын белгисиндей болуп алынат.

Мисал. Координаталар башталмасынан $3x-4y+5=0$ түз сызыгына чейинки аралыкты аныктагыла.

$$p = \frac{5}{\sqrt{9+16}} = \frac{5}{5} = 1.$$

Эми берилген $M_1(x_1, y_1)$ чекитинен (13) түз сызыкка чейинки аралыкты табуу керек болсун (19-чийме).

Координаталар башталмасы менен $M_1(x_1, y_1)$ чекити $l: Ax+By+C=0$ түз сызыгынын эки жагында жатсын.

$M_1(x_1, y_1)$ чекити аркылуу l ге параллель болгон m түз сызыгын жүргүзөбүз, анда (19) боюнча анын теңдемеси $Ax+By-Ax_1-By_1=0$ болот. Эми координаталар башталмасынан l жана m түз сызыктарына чейинки аралыктарды p жана p_1 аркылуу белгилесек, анда M_1 ден l түз сызыгына чейинки аралык $d=p_1-p$ болот. Мында l ге чейинки аралык (20) боюнча табылат, ал эми m ге чейинки аралык

$$p_1 = \frac{-Ax_1 - By_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \tag{21}$$

боюнча табылат. Мында радикалдын сыртындагы белгилер (20) менен (21) де бирдей болуусу тийиш, анткени l менен m координаталар башталмасынын бир жагында жатат. (21) ден (20) ны кемитип, изделген аралыкты табабыз:

$$d = \frac{-Ax_1 - By_1 - C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (22')$$

Эгерде радикалдын сыртындагы белгини C нын белгиси карама-каршы кылып алууну шартташсак, анда аралык үчүн

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (22)$$

формулага ээ болобуз.

Мында эгерде координаталар башталмасы менен $M_1(x_1, y_1)$ чекити l түз сызыгынын бир жагында жатса, d үчүн терс маани чыгат, анткени $p > p_1$.

Мисал. $M_1(4, 3)$ чекитинен $3x+4y-10=0$ түз сызыгына чейинки аралыкты тапкыла.

Мында $C=-10$ болгондуктан, радикалдын сыртында оң белги алынат:

$$d = \frac{3\cdot 4 + 4\cdot 3 - 10}{\sqrt{9+16}} = \frac{14}{5} = 2{,}8.$$

III глава. ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИИРИ СЫЗЫКТАР

§ 1. Айлана

Аныктама. *Эгерде сызык декарттык x жана y өзгөрмөлөрүнө карата n-даражадагы теңдеме менен аныкталса, анда ал n-тартиптеги сызык деп аталат.*

Алсак, $2x-y+3=0$, $x^2-y^2=4$, $xy^2-2x^2y=5$ теңдемелери менен аныкталган сызыктар, ирети менен 1-, 2- жана 3-тартиптеги сызыктар болушат.

Жогоруда параграфтарда биз түз сызыктын биринчи тартиптеги сызык экендигин көрдүк.

Эми экинчи тартиптеги сызыктарды изилдөөгө өтөбүз. Алардын ичинен эң жөнөкөйү айлана болуп саналат.

Жогоруда I главанын § 8 да борбору $O(a, b)$, радиусу R болгон айлананын теңдемеси

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

болорун көрдүк.

Эгер айлананын борбору координаталар башталмасында болсо, анын теңдемеси

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (2)$$

болору да белгилүү.

(1) теңдемедеги кашааларды квадратка көтөрүп, R^2 ты сол жакка чыгарып

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (3)$$

теңдемесине ээ болобуз.

Бул теңдеме экинчи даражадагы эң жалпы түрдөгү

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (4)$$

теңдеменин $A=C\neq 0$, $B=0$ учуруна туура келүүчү айрым учуру болуп саналат.. Тескерисинче эгерде (4) теңдемеде $A=C\neq 0$, $B=0$ болсо, анда ал айлананын теңдемеси болорун көрсөтүүгө болот.

Чындыгында эле бул учурда, ал теңдеменин бардык мүчөлөрүн A га бөлгөндөн кийин:

$$x^2+y^2+\frac{2D}{A}x+\frac{2E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

түрүнө келет.
Бул теңдемени

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}-\frac{F}{A}$$

түрүндө жазууга болот. Эгер $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{E}{A}$ $p=\frac{D^2+E^2-AF}{A^2}$

деп белгилесек, анда

$$(x-a)^2+(y-b)^2=p \qquad (4а)$$

теңдемесине келебиз. Ошентип, эгер $p>0$ болсо (4а) борбору $O(a, b)$ чекити, радиусу $R=\sqrt{p}$ болгон айлананын теңдемеси болот. Эгер $p=0$ болсо, аны $O(a, b)$ борборунун координаталары гана канааттандырат, бул учурда айлана чекитке айланды деп айтышат. Ал эми $p<0$ болгондо ($4a$) ны эч бир чекит канааттандырбайт (айлана «мнимый» болот).

Айлананын теңдемеси x жана y ке карата экинчи даражада болгондуктан айлана экинчи тартиптеги ийри сызык болот. Эң жалпы түрдөгү экинчи даражадагы (4) теңдеме $A=C\neq 0$, $B=0$ болгондо, айлананын теңдемеси болгондуктан төмөндөгүдөй тыянакка келебиз. Айлананын теңдемесинде:

1) x^2 жана y^2 тардын коэффициенттери бирдей болушат;

2) xy көбөйтүндүсүн камтыган мүчө болбойт. Бул касиеттер айлананын теңдемесине гана таандык.

Мисалдар. 1. $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ айланасынын борборун жана радиусун аныктагыла. Бул чындыгында эле айлананын теңдемеси болот, анткени жогорку эки касиет тең орундалат. Аны

$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=16$$

же

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4^2.$$

түрүндө жазууга болот. Демек $a=2$, $b=-3$, $R=4$, б. а. борбору $O(2, -3)$, радиусу $R=4$ болот.

2. $A(-3, 0)$ жана B $(3, 6)$ чекиттери берилген. Диаметри AB кесиндиси болгон айлананын теңдемесин жазгыла. Эң мурда AB кесиндисининин узундугун, б. а. A жана B чекиттеринин аралыгын табабыз:

$$AB=\sqrt{(3+3)^2+(6-0)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{2\cdot 36}=6\sqrt{2}$$

Демек изделген айлананын радиусу $R=3\sqrt{2}$ болот. Эми AB кесиндисин тең экиге бөлгөн, O_1 борборунун координаталарын табабыз:

$$x_0=\frac{-3+3}{2}=0,\quad y_0=\frac{0+6}{2}=3;\quad O_1(0,\ 3).$$

Ошентип, изделген айлананын теңдемеси

$$x^2+(y-3)^2=18 \text{ же } x^2+y^2-6y-9=0$$

болот.

§ 2. Эллипс

Аныктама. *Фокустары деп аталуучу F_1 жана F_2 эки чекитке чейинки аралыктардын суммасы туруктуу болгон тегиздиктеги чекиттердин геометриялык орду* эллипс *деп аталат.*

Ушул аныктама боюнча эллипстин жөнөкөй теңдемесин түзүүгө болот. Эллипстин жөнөкөй теңдемесин жазуу үчүн xOy координаталар системасын, F_1 жана F_2 фокустары Ox огунда жатып, координаталар башталмасы F_1F_2 аралыгын тең экиге бөлгүдөй кылып тандап алабыз. $F_1F_2=2c$ болсун, анда $F_1(c,\ 0)$ жана $F_2(-c,0)$ болот (20-чийме).

$M(x,\ y)$ эллипстин каалагандай чекити болсун,

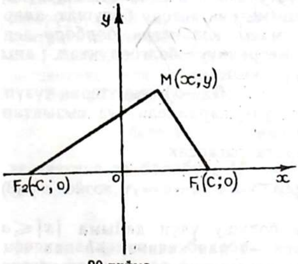
$$F_1M=r_1,\ F_2M=r_2 \qquad r_1+r_2=2a \tag{1}$$

деп белгилейли (мында $2a=\text{const}$), анда аныктама боюнча F_1M+ $+F_2M=2a$ болот. r_1 менен r_2 ни эллипстин фокустук радиустары дейбиз. Биздин белгилөөлөр боюнча $2a>2c$ (үч бурчтуктун эки жагынын узундуктарынын суммасы анын үчүнчү жагынын узундугунан чоң), демек $a>c$. Эки чекиттин арасындагы аралыктын формуласы боюнча:

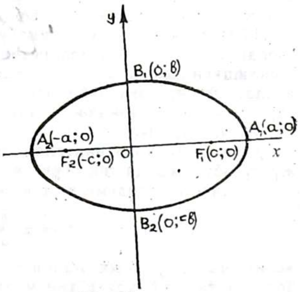
$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{2}$$

$$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{3}$$

экендиги белгилүү. Буларды (1) барабардыкка коюп:



20-чийме



20ᵃ-чийме

3—

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \qquad (4)$$

теңдемесине ээ болобуз. Бул (4) теңдеме *эллипстин теңдемеси* болот.

Аны жөнөкөйлөтүп, *каноникалык* деп аталуучу түргө келтиребиз. Экинчи радикалды барабардыктын оң жагына чыгарып, эки жагын тең квадратка көтөрсөк:

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

же

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

түргө келет. Мунун эки жагын дагы квадратка көтөрүп: (5)

$$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

же

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

теңдемесине келебиз. Белгилөөбүз боюнча $a>c$ болгондуктан $a^2>c^2$, $a^2-c^2>0$. Ошондуктан

$$a^2-c^2=b^2$$

деп белгилесек:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad (6)$$

же

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (7)$$

теңдемесине келебиз. Бул эллипистин каноникалык теңдемеси, ал x жана y ке карата экинчи даражада болгондуктан, эллипс экинчи тартиптеги сызык болот.

Эми каноникалык теңдемеси боюнча эллипстин формасын изилдөөгө киришебиз. Эллипстин теңдемесинде x жана y координаталары экөө тең квадратка көтөрүлүп турат, ошондуктан алардын ордуна $-x$ жана $-y$ коюлса да, баары бир x^2 жана y^2 келип чыгат. Демек эллипс Ox жана Oy окторуна жана O башталмасына карата симметриялуу фигура болуп саналат. Ошентип, координаталар октору эллипстин симметрия октору болушат, алар кесилишкен чекит, б. а. O башталмасы *эллипстин борбору* деп аталат. Эллипс эки окко тең симметриялуу болгондуктан, аны бир эле чейректе изилдөө жетиштүү болот.

$A_1(a, O)$, $A_2(-a, O)$, $B_1(O, b)$, $B_2(O, -b)$ чекиттерин түзүп, алар аркылуу координаталар окторуна параллель түз сызыктар жүргүзөбүз, мында тик бурчтук түзүлөт.

Эллипстин теңдемесин y ке карата чыгарсак:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (8)$$

келип чыгат. y анык мааниге ээ болушу үчүн дайыма $|x|\leqslant a$ болууга тийиш, анда y тин мааниси $-b$ дан кичине, $+b$ дан чоң боло албайт. Демек, эллипс толугу менен жогоруда түзүлгөн тик бурчтуктун ичинде жатат. Биринчи чейректе $y>0$, ошондуктан $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ тармагын алабыз. $x=0$ болсо, $y=b$ болуп, $B_1(0, b)$ чекитине, $x=a$ болсо, $y=0$ болуп $A_1(a, 0)$ чекитине ээ болобуз. Демек бул чекиттер эллипсте жатат. Ошентип, эллипстин чекиттеринин x абсциссасы $x=0$ дөн a га чейин өскөндө y ги b дан 0 гө чейин кемийт.

Мындагы A_1, A_2, B_1, B_2 чекиттери эллипстин чокулары деп аталышат, алар эллипстин октоpуна карата симметриялуу болгондуктан анын графиги 20-*а* чиймеде көрсөтүлгөндөй аталган тик бурчтуктун сыртына чыкпаган туюк ийри сызык болот.

Узундугу $2a$ болгон A_2A_1 кесиндиси эллипстин *чоң огу* деп, узундугу $2b$ болгон B_2B_1 кесиндиси *кичине огу* деп аталат, ал эми $OA_1=a$ жана $OB_1=b$ кесиндилери эллипстин чоң жарым огу жана кичине жарым огу деп аталат. F_1F_2 кесиндисинин $2c$ га барабар болгон узундугу *фокустук аралык* деп аталат.

Эскертүү. Эгерде $a=b$ болсо, анда эллипстин (7) каноникалык теңдемеси $x^2+y^2=a^2$ болуп, айлананын теңдемесине ээ болобуз, демек, айлана эллипстин айрым учуру болот.

Эллипстин эксцентриситети, фокустук радиустары жана директрисалары.

Эллипстин фокустук аралыгынын чоң огуна болгон катышын эллипстин эксцентритети деп аташат да,

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a} \text{ же } \varepsilon=\frac{c}{a} \tag{9}$$

аркылуу белгилешет. Эллипсте $c<a$ болгондуктан, анын эксцентриситети бирден кичине болот: $\varepsilon<1$.

a^2-$c^2=b^2$ тан $c^2=a^2-b^2$ болгондуктан

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2} \text{ же } \varepsilon=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \tag{10}$$

экендигине ээ болобуз. Бул (7) формула боюнча эгерде $a=b$ болсо, анда $\varepsilon=0$ болорун байкайбыз, б. а. айлана үчүн $\varepsilon=0$. Эгерде b кичирейсе, анда ε чоңоюп бирге жакындайт. Ошентип, чоң огу өзгөрүүсүз калып, кичине огу кичирейип эллипс куушурулса, эксцентриситет чоңоёт. Эгер $b=0$ болсо, эллипс кесиндиге айланып $\varepsilon=1$ болот, б. а. түз сызык үчүн $\varepsilon=1$ болот. Ошентип, эллипстин эксцентриситети эллипстин чоюлгучтугун мүнөздөйт.

Эми (5) формуладан:

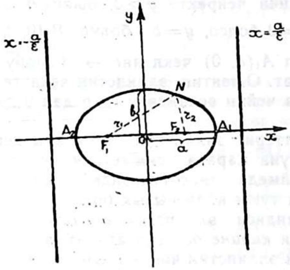
$$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x,\ r_2=a+\varepsilon x \tag{11}$$

экендигине ээ болобуз. Ал эми $r_1+r_2=2a$ болгондуктан (11) ден r_2 ни койсок, $r_1=a-\varepsilon x$ келип чыгат. Ошентип,

$$\begin{aligned} r_2&=a+\varepsilon x,\\ r_1&=a-\varepsilon x \end{aligned} \tag{12}$$

формулаларына ээ болобуз. Булар фокустук радиустарды аныктоочу формулалар болуп саналат.

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon} \qquad (13)$$



21-чийме

түз сызыктары *эллипстин директрисалары* деп аталат.

Эллипс үчүн $\varepsilon < 1$ болгондуктан, (13) боюнча аныкталган директрисалар Oy огуна параллель болушуп, эллипстин сыртынан өтүшөт (21-чийме).

Мисалдар. 1. Эллипстин фокустарынын арасындагы аралык 8, ал эми кичине жарым огу $b=3$ экендигин билип, анын теңдемесин жазгыла.

Мында $2c=8$ ден $c=4$. Ал эми (6) боюнча $a^2=b^2+c^2=9+16=25$. Демек, изделген эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ болот.

2. Чоң жарым огу $a=6$, ал эми эксцентриситети $\varepsilon=\frac{1}{2}$ болгон эллипстин теңдемесин жазгыла.

Бул сапар мурда $\varepsilon=\frac{c}{a}$ барабардыгынан c ны аныктап алабыз. $c=\varepsilon\cdot a$ дан $c=3$, анда (6) боюнча $b^2=a^2-c^2=36-9=27$. Демек, эллипстин теңдемеси $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ болот.

3. Эгерде фокустарынын арасындагы аралык чоң жана кичине окторунун учтарынын арасындагы аралыкка барабар болсо, эллипстин эксцентриситетин аныктагыла.

$A_1(a, 0)$, $B_1(0, b)$ чекттеринин аралыгы $\sqrt{a^2+b^2}$ экендиги белгилүү, шарт боюнча $2c=\sqrt{a^2+b^2}$. Мындан $a^2+b^2=4c^2$. Ал эми (6) боюнча $a^2-b^2=c^2$. Бул эки теңдемени бирге чыгарсак, $\varepsilon=\sqrt{0{,}4}$ табылат.

4. Окторго карата симметриялуу болуп, фокустары Ox огунда жаткан эллипс $M(2, \sqrt{3})$ жана $B(0, 2)$ чекиттери аркылуу өтөт. Эллипстин теңдемесин жазгыла жана M чекитинин фокустук радиус-векторлорун аныктагыла.

Маселенин шарты боюнча $b=2$, анткени B чекити Oy огунда жатат. Изделген эллипс M чекити аркылуу өткөндүктөн, анын координаталары ошол эллипстин теңдемесин канааттандырат, демек, $\frac{4}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ болууга тийиш, мындан $\frac{4}{a^2}=\frac{1}{4}$ же $a^2=16$, $a=4$ табылат. Ошентип, изделген эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ болот. (6) боюнча $c^2=16-4=12$, $c=2\sqrt{3}$, демек, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$ болот.

Эми (11), (12) боюнча r_1 жана r_2 оңой эле табылат. Алар $r_1=4-\sqrt{3}$, $r_2=4+\sqrt{3}$ болот.

§ 3. Гипербола

Аныктама. *Фокустары деп аталуучу берилген F_1 жана F_2 эки чекитке чейинки аралыктарынын айырмасы турактуу чоңдук болгон тегиздиктеги чекиттердин геометриялык орду* ***г и п е р б о л а*** *деп аталат.*

Гиперболанын теңдемесин чыгаруу үчүн Ox огун F_2F_1 аркылуу созуп, координаталар башталмасы үчүн анын ортосун алабыз да, $F_2F_1=2c$ болсун дейлик. $M(x, y)$ чекити гиперболанын чекити болсун, анда $MF_1=r_1$, $MF_2=r_2$ десек, аныктама боюнча (22-чийме):

$$r_2-r_1=2a \tag{1}$$

болот (мында $2a=\text{const}$). Шарт боюнча $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ болгондуктан:

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \tag{2}$$

Бул r_1 жана r_2 лердин маанилерин (1) ге коюп,

$$c^2-a^2=b^2 \tag{3}$$

деп белгилеп (анткени, үч бурчтуктун жагы калган эки жагынын айырмасынан чоң болуп, $c>a$ болот), эллипстин теңдемесин чыгарган сыяктуу иштесек, *гиперболанын* төмөнкүдөй *каноникалык* теңдемесине келебиз:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4}$$

Гипербола дагы экинчи тартиптеги сызык болору (4) теңдемеден көрүнүп турат.

Гиперболанын каноникалык теңдемесинде x жана y жуп даражада гана болгондуктан, гипербола координаталар окторуна карата симметриялуу сызык болот, ал октор гиперболанын симметрия октору болот.

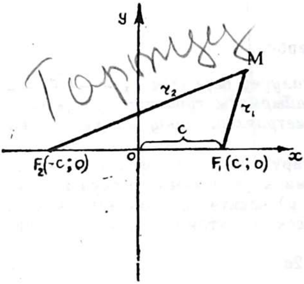
(4) теңдемени y ке карата чыгарсак,

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{5}$$

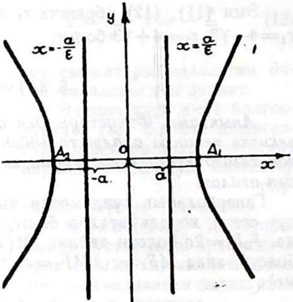
келип чыгат. Биринчи чейректе $y>0$ болгондуктан

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{5a}$$

учурун карайбыз. Мында $x\geqslant a$ болгондо гана $y\geqslant 0$ болот. $x=a$ да $y=0$ болуп, гипербола Ox огун кесип өтөт, x андан ары чоңойгондо y дагы чоңоёт, б. а. $x\to+\infty$ да y дагы $+\infty$ ге умтулат, бул гиперболанын тармактары чексиз созула тургандыгын көрсөтөт.



22-чийме



23-чийме

Гиперболанын симметриялуулук касиети боюнча анын графигин түзө алабыз. Гипербола Ox огун A_1 жана A_2 чекиттеринде кесип, окторго симметриялуу бойдон чексиздикке созулган эки тармактан түзүлөт (23-чийме). Мында A_1 $(a,0)$ жана A_2 $(-a,0)$ чекиттери гиперболанын чокулары деп аталат, A_2A_1 кесиндиси $2\,a$ га барабар болот. Октор кесилишкен O чекити *гиперболанын борбору* деп, $A_2A_1=2a$ кесиндиси анык огу деп, $B_2B_1=2b$ кесиндиси *мнимый огу* деп аталат. Гиперболанын a жана b *жарым октору* c *фокустук аралыгы* менен (3) аркылуу байланышкан.

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

гиперболасы (4) гө *тутумдаш гипербола* деп аталат. Тутумдаш гипербола Oy огун $B_1(0,\ b)$ жана $B_2(0,-b)$ чекиттеринде кесип өтөт, ошондуктан бул чекиттер анын чокулары болот, анын фокустары $F_3(0,\ c)$ жана $F_4(0,-c)$ чекиттери болот. Тутумдаш гипербола үчүн анык ок менен мнимый октордун ролдору алмашат.

Эллипстегидей эле

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (7)$$

гиперболанын эксцентриситети деп аталат. Гипербола үчүн $c>a$ болгондуктан, анын эксцентриситети бирден чоң болот: $\varepsilon>1$.

Эгер $a=b$ болсо, *(4)* теңдеме

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ же } x^2-y^2=a^2 \qquad (8)$$

түрүнө келет. Мындай гипербола бирдей тармактуу гипербола деп аталат.

Гиперболанын оң тармагынын каалагандай $M(x, y)$ чекити үчүн, эллипстин учурундагыдай эле r_1 жана r_2 фокустук радиустары:

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \; r_2 = \varepsilon x + a \tag{9}$$

түрүндө туюнтуларын көрсөтүүгө болот. Гиперболанын сол тармагы үчүн:

$$r_1 = -(\varepsilon x - a), \; r_2 = -(\varepsilon x + a) \tag{10}$$

аткарылат.

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ жана } x = -\frac{a}{\varepsilon} \tag{11}$$

түз сызыктары *гиперболанын директрисалары* деп аталат. Гипербола үчүн $\varepsilon > 1$ болгондуктан анын директрисалары A_1 жана A_2 чокуларынын арасында жайгашкан, Oy огуна параллель түз сызыктар болушат (23-чийме).

Гиперболанын асимптоталары. Гиперболанын y ке карата чыгарылган (5) теңдемесин

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \tag{5'}$$

түрүндө жазууга болот. Эгер $x \to \pm\infty$ са, анда (5') теги радикал 1 ге умтулат. Аны 1 менен алмаштырып:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \tag{12}$$

түрүндөгү координаталар башталмасы аркылуу өтүүчү түз сызыктардын теңдемелерине ээ болобуз. Бул түз сызыктар гиперболанын асимптоталары деп аталат. $a = b$ болгон тең жактуу (8) гипербола үчүн асимптоталар $y = \pm x$ түз сызыктары болушат, алар өз ара перпендикулярдуу.

Мисалдар. 1. Анык огу $a = 2\sqrt{5}$, ал эми эксцентриситети $\varepsilon = \sqrt{1,2}$ болгон гиперболанын теңдемесин жазгыла.

Мында (7) боюнча $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $c = \varepsilon \cdot a$ болгондуктан $c = 2\sqrt{5}\sqrt{1,2} = 2\sqrt{6}$ болот. Ал эми (3) боюнча $b^2 = c^2 - a^2 = 24 - 20 = 4$. Демек, изделген гипербола: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$ болот.

2. $M(6, -2\sqrt{2})$ чекити аркылуу өткөн, мнимый жарым огу $b = 2$ болгон гиперболанын теңдемесин жазып, M чекитинин фокустарга чейинки аралыктарын аныктагыла.

Бул M чекити үчүн $x > 0$ болгондуктан, ал гиперболанын оң тармагында жатат. $b = 2$ болгондуктан жана гипербола M чекити аркылуу өткөндүктөн (4) боюнча $\frac{36}{a^2} - \frac{8}{4} = 1$ же $a^2 = 12$ болот. Демек, изделген гипербола $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ болот.

Анын эксцентриситетин табуу үчүн (3) дөн c ны табабыз:

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16}=4$. Демек, $\varepsilon=\frac{4}{2\sqrt{3}}$.

Эми M чекитинин r_1 жана r_2 фокустук аралыктарын (9) боюнча аныктайбыз:

$$r_1=\frac{4}{2\sqrt{3}}\cdot 6-2\sqrt{3}=\frac{12}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{3},\ r_2=\frac{4}{2\sqrt{3}}\cdot 6+2\sqrt{3}=$$
$$=\frac{36}{2\sqrt{3}}=6\sqrt{3}.$$

§ 4. Парабола

Аныктама. Фокусу деп аталуучу F чекитине жана директрисасы деп аталуучу l түз сызыгына чейинки аралыктары бирдей болгон тегиздиктеги чекиттердин геометриялык орду ***п а р а б о л а*** деп аталат.

Ушул аныктамага таянып, параболанын каноникалык тендемесин чыгарабыз. Ал үчүн l түз сызыгына перпендикуляр болуп F чекити аркылуу өтүүчү EF түз сызыгын Ox огу деп алып, EF кесиндисинин ортосун координаталар башталмасы деп эсептейбиз. Анда $EF=p$ болсун деп белгилесек, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ болот. Берилген параболадан каалагандай $M(x, y)$ чекитин алып, андан l директрисасына перпендикуляр түшүрөбүз, анын l менен кесилишкен чекитин N десек: $N\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ болору ачык. Аныктама боюнча $MN=MF$, ал эми $MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, $MN=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2}$ болгондуктан аларды барабарлап: $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$, квадратка көтөрүп, жөнөкөйлөтсөк:

$$y^2=2px \tag{1}$$

тендемесине келебиз. Бул *параболанын каноникалык* тендемеси деп аталат, ал эми *p болсо параболанын параметри*, $r=MF$ *фокустук-радиусу* деп аталат. $r=MF=MN=x+\frac{p}{2}$ болгондуктан

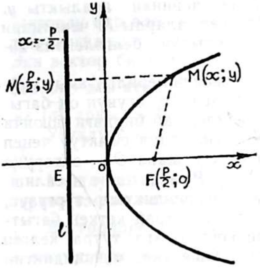
$$r=x+\frac{p}{2} \tag{2}$$

фокустук-радиустун формуласы болот. l директрисасынын тендемеси

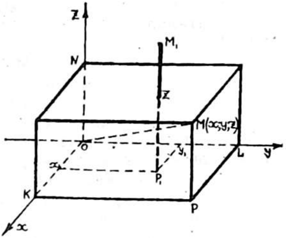
$$x=-\frac{p}{2} \tag{3}$$

болорун байкайбыз.

Эми (1) формула боюнча параболанын формасын изилдейбиз: Андан $y=\pm\sqrt{2px}$ болгондуктан, x тин бир эле маанисине y тин чондуктары бирдей, белгилери карама-каршы болгон эки мааниси туура келет. $x=0$ болсо, $y=0$ болот.



24-чийме



25-чийме

$p>0$ болгондуктан $y=\pm\sqrt{2px}$ боюнча x дагы оң болууга тийиш. x чоңойсо, y дагы чоңоёт, демек парабола $p>0$ кезинде Oy огунун оң жагында жайгашат. Ошентип, парабола координаталар башталмасы аркылуу өтүп, Ox огуна симметриялуу болгон сызык болот (24-чийме).

Парабола менен мектептик курстан жакшы таанышпыс, ошондуктан ага көп токтолбойбуз.

Мисалдар. 1. Фокустан директрисага чейинки аралыгы 10 болгон параболанын теңдемесин жазгыла. $p=10$ болгондуктан $y^2=20x$ болот.

2. $y=0{,}25x^2$ параболасынын фокусунун координаталарын жана директрисасынын теңдемесин аныктагыла.

Аны $x^2=4y$ деп жазууга болот, демек ал OY огуна симметриялуу. Мында $2p=4$ болгондуктан $p=2$. Демек, фокусу $F(0,\ 1)$ чекити болот. Директрисасынын теңдемеси $y=-1$ болот.

IV глава. ВЕКТОРДУК АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

§ 1. Мейкиндиктеги координаталар методу

Мейкиндиктин кандайдыр бир O чекити аркылуу өз ара перпендикуляр болушкан Ox, Oy жана Oz окторун алабыз. Аларды координаталар октору деп атап, 25-чиймеде жебелер менен көрсөтүлгөн багыттарды, алардын оң багыттары деп, аларга карама-каршы багыттарды терс багыттары дейбиз. Ox ти абцисса огу, Oy ти ордината огу, ал эми Oz ти аппликата огу деп аташат.

Эми мейкиндиктин каалагандай M чекитинин абалын толук аныктоого болот. Ал үчүн M чекитинен координаталар окторуна перпендикуляр тегиздиктер жүргүзөбүз да Ox, Oy, Oz октору менен кесилишкен чекиттерин ирети менен K, L, N аркылуу белгилейбиз. Белгилүү бир масштаб менен O координаталар башталмасынан K га чейинки аралыкты x, L ге чейинки аралыкты y, N ге чейинки аралыкты z аркылуу белгилеп, аларды M чекитинин координаталары деп атап, $M(x, y, z)$ аркылуу белгилейбиз 25-чийме).

Эгерде бизге мурдатан $M_1(x_1, y_1, z_1)$ чекити берилсе, анын мейкиндиктеги абалын аныктоо үчүн x_1 оң болсо, Ox огунун оң багытына, терс болсо терс багытына x санын масштаб бирдиги боюнча ченеп коёбуз. y ординатасын дагы Oy огуна ушул сыяктуу ченеп коёбуз. Аларга туура келген чекиттерден Oy жана Ox окторуна параллель түз сызыктар жүргүзөбүз. Алар P_1 чекитинде кесилишсин. Эми P_1 чекитинде xOy тегиздигине перпендикуляр тургузуп, z_1 оң болсо, жогору карай, терс болсо төмөн карай кеткен багытта ал перпендикулярга z_1 санын ченеп коёбуз. Ага туура келген чекит $M_1(x_1, y_1, z_1)$ чекитинин өзү болот. Ошентип, мейкиндиктин каалагандай чекитине үч координата, тескерисинче каалагандай үч координатага мейкиндикте бир чекит туура келет.

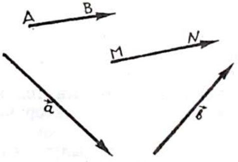
Эгерде ар бир эки координаталар октору аркылуу бирден тегиздик жүргүзсөк, алар кесилишип мейкиндикти 8 бөлүккө (октанттарга) бөлөт. Ар бир октанттагы чекиттер белгилүү бир комбинациядагы белгилерге ээ болушат.

Координаталар октору аркылуу өткөн, xOy, yOz, zOx тегиздиктери координаталар тегиздиктери деп аталат.

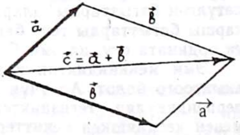
§ 2. Вектордук жана скалярдык чоңдуктар, алар менен жүргүзүлүүчү амалдар

Механикада жана физикада эки түрдүү чоңдуктар кездешет. Айрым чоңдуктар, алсак: масса, тыгыздык, температура, көлөм ж. б. бир гана сандык маанилери менен толук мүнөздөлөт. Мындай чоңдуктарды *скалярдык чоңдуктар* дешет. Кээ бир чоңдуктар, алсак: ылдамдык, күч, ылдамдануу, сыяктуу чоңдуктар сандык маанилери менен эле мүнөздөлө албайт, алардын багыттары дагы көрсөтүлүшү талап кылынат. Мындай чоңдуктарды *вектордук чоңдуктар* дешет.

Багытталган кесиндилер *векторлор* деп аталат. Векторлорду $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, ... түрүндөгү, үстүнө жебе коюлган эки баш тамга менен белгилешет, мында биринчи орунга вектордун башталышын көрсөткөн тамга, экинчи орунга учун көрсөткөн тамга коюлат. Кээде



26-чийме



27-чийме

векторду бир эле жоонойтулган кичине тамга менен да: $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ деп белгилешет (26-чийме).
Эки вектор бирдей багытталып, бирдей узундукта болгондо гана *барабар* деп аталат. Вектордун узундугу *модуль* деп аталып: $|\overrightarrow{AB}|$ же $|\vec{a}|$ аркылуу белгиленет.

Узундугу нөлгө барабар вектор *нөлдүк вектор* деп аталат, $\vec{0}$. $|\vec{0}|=0$.

Узундуктары бирдей болуп, карама-каршы багытталган векторлор *өз ара карама-каршы векторлор* деп аталат.

Векторлорду кошуу. *$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун суммасы деп, $\vec{b}$ векторунун башталышы $\vec{a}$ нын учуна коюлган учурда $\vec{a}$ нын башталышы менен $\vec{b}$ нын учун бириктирген жаңы векторду айтышат* (27-чийме).
Векторлорду кошуу төмөнкүдөй касиеттерге ээ.
1. *Орун алмаштыруу касиети аткарылат:*

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}. \tag{1}$$

Чындыгында эле, (1) барабардыктын эки жагы каалагандай $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору үчүн, ошол эле эки векторго түзүлгөн параллелограммдын диагоналы болот (27-чийме).

Аныктама. *Эгерде эки же андан көп векторлор бир түз сызыкта же параллель түз сызыктарда жатышса, анда алар* ***коллинеардуу*** *векторлор деп аталат.*

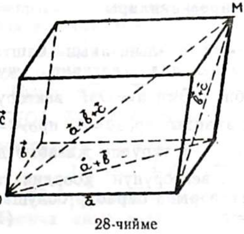
Эгер эки вектор коллинеардуу болушса, алар үчүн жогоруда аталган параллелограмм кесиндиге же чекитке айланып калышы ыктымал.

2 Векторлорду кошууда *топтоштуруу:*

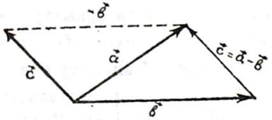
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{2}$$

касиети орундалат.

Чындыгында эле, каалагандай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ үч векторун бир чекитке коюп, аларга параллелепипед түзсөк, (2) барабардыктын эки жагы тең ошол параллелепипеддин бир эле *OM* диагоналын туюнтат (28-чийме).



28-чийме



29-чийме

Аныктама. *Эгерде үч же андан көп векторлор бир тегиздикке же параллель тегиздиктерге жайгашса, анда алар компланардуу деп аталат.*

Эгер үч вектор компланардуу болушса, анда аталган параллелепипед параллелограммга, кесиндиге же чекитке айланып калышы ыктымал.

Векторлорду кошуу амалы ар кандай чектүү сандагы кошуулуучулар үчүн жайылтылат.

Векторлорду кемитүү. $\vec{a}$ *жана* $\vec{b}$ *векторлорунун айырмасы* деп, $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ *боло турган* $\vec{c}$ *векторун айтышат да, аны* $\vec{a}-\vec{b}$ аркылуу белгилешет. $\vec{a}$ векторунан $\vec{b}$ векторун кемитиш үчүн $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун башталыштарын бир чекитке коюп, башталышы $\vec{b}$ нын учу менен, ал эми учу $\vec{a}$ векторунун учу менен дал келише турган $\vec{c}$ векторун түзүү керек (29-чийме). Ошол эле 29-чиймеден: $\vec{a}$ векторунан $\vec{b}$ векторун кемитүү дегендик $\vec{a}$ векторуна $-\vec{b}$ векторун кошуу экендиги ачык көрүнүп турат.

Векторду скалярга көбөйтүү. $\vec{a}$ *векторунун* k *скалярына болгон көбөйтүндүсү деп,* эгер $k>0$ болсо, $\vec{a}$ менен бирдей *багытталып, эгер* $k<0$ *болсо, ага карама-каршы багытталып,* $|k|\cdot|\vec{a}|$ *узундугуна ээ болуучу векторду айтышат* да, аны $\vec{a}\cdot k$ же $k\cdot\vec{a}$ аркылуу белгилешет.

Алсак, $\vec{a}$ вектору менен $k=5$ тин көбөйтүндүсү $\vec{a}$ менен багытташ, узундугу $5\cdot|\vec{a}|$ болгон вектор, ал эми $k=-\frac{1}{2}$ менен көбөйтүндүсү $\vec{a}$ га карама-каршы багытталып, узундугу $\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|$ болгон вектор болот.

Аныктамалар боюнча, векторду скалярга көбөйтүү төмөнкүдөй касиеттерге баш иет:

1) $(k_1+k_2)\vec{a}=k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$; 2) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; 3) $k_1(k_2\vec{a})=(k_1k_2)\vec{a}$;

§ 3. Вектордун октордогу проекциялары

Мейкиндикте кандайдыр бир $\vec{a}$ векторун алып, анын башталышын координаталар башталмасы менен дал келтирип, учун $M(x, y, z)$ чекити аркылуу белгилейбиз. Эми $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ векторун координаталар окторуна проекциялап аларды: $\text{пр}_{Ox}\vec{a}=X$, $\text{пр}_{Oy}\vec{a}=Y$, $\text{пр}_{Oz}\vec{a}=Z$ аркылуу белгилеп: $\vec{a}\{X, Y, Z\}$ түрүндө жазабыз да $\vec{a}$ векторунун координаталары дейбиз. $\vec{a}$ векторунун координаталары M чекитинин тиешелүү координаталарына барабар болушат:

$$X=x,\ Y=y,\ Z=z. \tag{1}$$

Башталыштары координаталар башталмасында болуп, өз ара перпендикуляр жайгашып, ирети менен Ox, Oy, Oz октору боюнча багытталышкан, модулдары бирге барабар болушкан $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ бирдик векторлор *негизги орттор* деп аталат.

Башталышы координаталар башталмасы менен дал келишкен каалагандай $\vec{a}$ вектору ушул $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ негизги орттордун сызыктуу комбинациясы аркылуу (алардын скалярга болгон көбөйтүндүлөрүнүн суммасы аркылуу) туюнтууларын көрсөтүүгө болот. $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ векторунун M учунан xOy тегиздигине перпендикуляр түшүрүп, анын ал тегиздик менен кесилишкен чекитин P аркылуу белгилейбиз. P чекитинен Ox жана Oy окторуна перпендикулярдуу сызыктар жүргүзүп, ал октор менен кесилишкен чекиттерди K, L аркылуу белгилейбиз. M чекити аркылуу xOy тегиздигине параллель жүргүзүлгөн тегиздиктин Oz огу менен кесилишкен чекитин N деп белгилейли. Мында

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON} \tag{2}$$

экендиги ачык (30-чийме) анткени $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}$. $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ вектору M чекитинин *радиус-вектору* деп аталат.

Ал эми $\vec{i}$ жана $\overrightarrow{OK}$ векторлору коллинеардуу болгондуктан $\overrightarrow{OK}=\lambda\vec{i}$ боло турган λ санын дайыма тандап алууга болот. Калган эки вектор үчүн дагы ошондой эле μ жана ν сандары табылат, ошентип

$$\vec{a}=\lambda\cdot\vec{i}+\mu\cdot\vec{j}+\nu\cdot\vec{k} \tag{3}$$

барабардыгына ээ болобуз. Мындагы $\lambda\vec{i}, \mu\vec{j}, \nu\vec{k}$ кошулуучулары $\vec{a}$ векторунун *компоненттери* же *түзүүчүлөрү* деп аталат.

$\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OL}$ векторлору Ox, Oy, Oz окторуна багытташ болушса, λ, ν, μ оң сандар, карама-каршы болушса терс сандар болот, б. а. алар ошол векторлордун чоңдуктары болушат. Ал эми $\overrightarrow{OK}$ вектору $\vec{a}$ нын Ox огуна болгон проекциясы, демек $\lambda=|\overrightarrow{OK}|=\text{пр}_{ox}\vec{a}=X$. Ал эми $\mu=Y$, $\nu=Z$ болору ачык, демек

$$\vec{a}=X\vec{i}+Y\vec{i}+Z\vec{k} \tag{3a}$$

аткарылат.

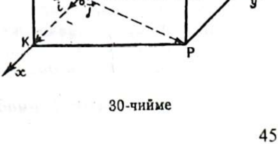
Ошол эле 30-чиймеде $X=OK$, $Y=OL$, $Z=ON$ болгондуктан, $\overrightarrow{OM}$ векторунун $|\vec{a}|$ модулу:

$$|\vec{a}|^2=X^2+Y^2+Z^2$$

же

$$|\vec{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \tag{4}$$

боюнча аныкталат.



30-чийме

Багыттоочу косинустар. $\vec{a}$ векторунун Ox, Oy, Oz окторунун оң багыттары менен түзгөн бурчтарын ирети менен α, β, γ аркылуу белгилейбиз.

X, Y, Z тер $\vec{a}$ векторунун окторго түшүрүлгөн проекциялары болушкандыктан:

$$X=|\vec{a}|\cos\alpha,\ Y=|\vec{a}|\cos\beta,\ Z=|\vec{a}|\cos\gamma. \qquad (5)$$

Эгер (4) нү эске алсак:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\\ \cos\beta &= \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

мындагы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар $\vec{a}$ векторунун *багыттоочу косинустары* деп аталат.

Эгер (6) дагы барабардыктарды квадратка көтөрүп, мүчөлөп кошсок:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (7)$$

формуласына келебиз. Демек α, β, γ лардын ичинен экөө гана каалагандай тандалып алынат, үчүнчүсү ушул (7) ден аныкталат.

Эми $A(x_1, y_1, z_1)$ жана $B(x_2, y_2, z_2)$ чекиттерин бириктирген $\overrightarrow{AB}$ вектору берилип, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ анын багыттоочу косинустары болсун.

же координатасы

$\overrightarrow{AB}$ векторунун Ox огуна болгон проекциясы деп, анын $|\overrightarrow{AB}|$ чоңдугу менен $\cos\alpha$ нын: $|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\alpha$ көбөйтүндүсүн айтышат: $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$. $\overrightarrow{AB}$ векторунун учтарынан Ox огуна перпендикуляр тегиздиктер жүргүзүп, $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}=x_2-x_1$ болоруна ынанабыз. Ошол сыяктуу эле $\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{AB}=y_2-y_1$, $\text{пр}_{Oz}\overrightarrow{AB}=z_2-z_1$ болот. Демек,

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\cdot\vec{k} \qquad (8)$$

ажыратуусуна ээ болобуз.

§ 4. Координаталары менен берилген векторлорго карата амалдар

Векторлордун проекцияларынын аныктамасы боюнча: векторлордун суммасынын каалагандай окко болгон проекциясы кошулуучу векторлордун проекцияларынын суммасына барабар. Мындан төмөнкүдөй эрежелер келип чыгат:

1. Координаталары барабар болгондо гана эки вектор барабар болот.

2. Координаталык формада берилген векторлорду кошкондо *(кемиткенде) алардын бир аттуу проекциялары кошулат (кемитилет).* Эгер $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ болсо

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2)\vec{i}+(y_1\pm y_2)\vec{j}+(z_1\pm z_2)\vec{k} \qquad (1)$$

орундалат.

2. Векторду скалярга көбөйткөндө, анын бардык координаталары ошол скалярга көбөйтүлөт. Эгер $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ болсо, анда

$$\lambda\vec{a}=\lambda x\vec{i}+\lambda y\vec{j}+\lambda z\cdot\vec{k} \qquad (2)$$

3. Координаталарынын пропорциялаштыгы эки вектордун коллиенардуулук шарты болот.

Чынында эле эгерде $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ жана $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ эки вектору коллиенардуу болсо, анда $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ аткарылат да $\vec{a}$ жана $\lambda\vec{b}$ векторлорунун тиешелүү координаталары барабар болот, б.а. $x_1=\lambda x_2$, $y_1=\lambda y_2$, $z_1=\lambda z_2$ орундалат. Мындан

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2} \qquad (3)$$

пропорцияларына ээ болобуз. Тескерисинче, эгер бул (3) шарт орундалса, анда аны λ аркылуу белгилеп, $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ орундалып $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун коллиенардуулугуна ынанабыз. Ошентип, (3) эки вектордун коллиенардуулук шарты болот.

Мисалдар. 1. M чекитинин радиус-вектору Ox огу менен 45° тук, Oy огу менен 60° тук бурч түзөт, анын узундугу $r=6$. Эгерде z терс болсо, M чекитинин координаталарын аныктагыла да, $\vec{OM}=\vec{r}$ векторун $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ орттору аркылуу туюнткула. M чекитинин x жана y координаталары:

$$x=6\cdot\cos 45^\circ=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2},\quad y=6\cos 60^\circ=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

болот. z ти табуу үчүн $\cos\gamma$ ны издейбиз.

$$\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}.$$

Шарт боюнча $z<0$, демек $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$ болуп, $z=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$ болот. Ошентип, $M(3\sqrt{2}, 3, -3)$ чекитине ээ болобуз.

2. $A(2, 2, 0)$ жана $B(0, -2, 5)$ чекиттери берилген. $\vec{a}=\vec{AB}$ векторун түзгүлө. Анын узундугун жана багытын аныктагыла.

Бул вектор $\vec{AB}=(0-2)\vec{i}+(-2-2)\vec{j}+(5-0)\vec{k}=-2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$, болот. Анын узундугу $|\vec{AB}|=\sqrt{4+16+25}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$. Анын багыттоочу косинустары:

$$\cos\alpha=\frac{-2}{3\sqrt{5}},\quad \cos\beta=\frac{-4}{3\sqrt{5}},\quad \cos\gamma=\frac{+5}{3\sqrt{5}}=+\frac{\sqrt{5}}{3}\ \text{болот.}$$

3. $A(r_1)$ жана $B(r_2)$ чекиттерин бириктирүүчү $\overrightarrow{AB}$ векторун берилген λ катышта бөлүүчү $C(r)$ чекитинин $\vec{r}$ радиус-векторун аныктагыла.

Шарт боюнча $\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{CB}$ болууга тийиш. Ал эми $\overrightarrow{AC}=\vec{r}-\vec{r}_1$, $\overrightarrow{CB}=\vec{r}_2-\vec{r}$ болгондуктан, ал шартты $\vec{r}-\vec{r}_1=\lambda(\vec{r}_2-\vec{r})$ же $\vec{r}-\vec{r}_1=\lambda\vec{r}_2-\lambda\vec{r}$ түрүндө жазабыз. Андан

$$(1+\lambda)\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2 \quad \text{же} \quad \vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda} \tag{4}$$

табылат. Эгер $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ болсо, ал эми $C(x, y, z)$ болсун десек, (4) нү проекциялар аркылуу

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{5}$$

түрүндө жазууга болот.

§ 5. Векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү

АНЫКТАМА. *Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү деп, алардын узундуктарынын көбөйтүндүсүнүн ошол векторлордун арасындагы бурчунун косинусуна көбөйтүлүшүнө барабар санды айтышат.*

Скалярдык көбөйтүндү $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\vec{a}\,\vec{b}$; $(\vec{a}\,\vec{b})$ үчөөнүн бири аркылуу белгиленет. Аныктама боюнча:

$$(\vec{a}\,\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \tag{1}$$

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун арасында: $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi$, $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$ байланышы аткарыларын эске алсак:

$$(\vec{a}\,\vec{b})=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}, \tag{1 а}$$

$$(\vec{a}\,\vec{b})=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} \tag{1 б}$$

барабардыгы аткарылат. Демек, эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү алардын биринин узундугу менен экинчи вектордун биринчисинин багытына түшүрүлгөн проекциясына көбөйтүлүшүнө барабар деп айтууга да болот.

Скалярдык көбөйтүндү төмөнкүдөй касиеттерге ээ болот.

1. Скалярдык көбөйтүндү орун алмаштыруу касиетине ээ болот, б. а.

$$(\vec{a}\,\vec{b})=(\vec{b}\,\vec{a}).$$

Чынында эле аныктама боюнча:

$$(\vec{a}\,\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{1}$$

$$(\vec{b}\,\vec{a})=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\varphi. \tag{1'}$$

Демек, алардын сол жактары да барабар.

2. Скалярдык көбөйтүндү *бөлүштүрүү* касиетине да ээ болот, б. а $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$. (2)

Далилдөө: (1 б) боюнча:

$$\overrightarrow{(a+b)}\vec{c}=|\vec{c}|\cdot\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\cdot(\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}+\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b})=$$
$$=|\vec{c}|\cdot\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\cdot\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}.$$

3. Скалярдык көбөйтүндү скалярга карата *топтоштуруу* касиетине ээ болот, б. а. $(\lambda\vec{a}\ \vec{b})=\lambda(\vec{a}\ \vec{b})$.

Аныктама боюнча эки жагында тең скалярдык көбөйтүндү λ эсе чоңоёт.

4. Качан эки вектордун бири нөлдүк вектор болгон учурда гана же эки вектор өз ара перпендикуляр болгондо гана алардын скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болот.

Чынында эле, аныктама боюнча $\vec{a}=\vec{0}$ же $\vec{b}=\vec{0}$, же $\cos\varphi=0$ болгондо гана $(\vec{a}\ \vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=0$ болот. Тескерисинче, эгер $(\vec{a}\ \vec{b})=0$ болуп, эки вектордун бири да нөлдүк вектор болбосо, анда $\vec{a}\perp\vec{b}$ болору ачык.

§ 6. Проекциялары менен берилген векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ жана $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ координаталары менен берилсин. Алардын оң жактарын бөлүштүрүү касиети боюнча көбөйтүп чыгабыз:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\,(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2\vec{i}\cdot\vec{i}+y_1x_2\vec{j}\cdot\vec{i}+$$
$$+z_1x_2\vec{k}\cdot\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j}+y_1y_2\vec{j}\cdot\vec{j}+z_1y_2\vec{k}\cdot\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\cdot\vec{k}+$$
$$+y_1z_2\vec{j}\vec{k}+z_1z_2\vec{k}\cdot\vec{k}.$$

Ал эми $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ өз ара перпендикулярдуу бирдик векторлор болушкандыктан векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн (1) формуласынын негизинде $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{k}\cdot\vec{i}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$, $\vec{k}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ болуп (3) дөн төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{4}$$

Координаталары *менен берилген эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү, алардын бир аттуу* координаталарынын *көбөйтүндүсүнүн суммасына барабар.*

Эгер $\vec{a}$ вектору өзүнө өзү скалярдуу көбөйтүлсө:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2 \tag{5}$$

орун алат.

Скалярдык көбөйтүндүнүн (1) формуласынан $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^0=|\vec{a}|^2$ келип чыгат. Демек, каалагандай $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ векторунун узундугу (модулу):

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \tag{6}$$

формуласынан табылат. Ошол эле (1) формуладан

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \tag{7}$$

болот, б. а. *эки вектордун арасындагы бурчтун косинусу ал векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн алардын узундуктарынын көбөйтүндүсүнө бөлүнгөнүнө барабар.* Эгер (4) жана (6) формулаларды колдонсок:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \tag{8}$$

формуласына ээ болобуз.

Эгерде эки вектор өз ара перпендикуляр болушса, анда $\cos\varphi=0$ болуп, (8) ден:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

шартына ээ болобуз. Бул эки вектордун *перпендикулярдык* шарты болот. Эгер эки вектор параллель болушса, анда $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ аткарылуу тийиш.

IV главанын §4 боюнча параллелдик шарты

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2} \tag{10}$$

барабардыгы болот.

Мисалдар. 1. $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$ жана $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ векторлорунун арасындагы бурчту аныктагыла. Бул бурчту (8) боюнча табабыз:

$$\cos\varphi=\frac{-1\cdot1+1\cdot(-2)+0\cdot2}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+4+4}}=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=135^\circ.$$

2. $A(a,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 0,\ 2a)$ жана $C(2a,0,\ a)$ чекиттери берилген. $\vec{OC}$ жана $\vec{AB}$ векторлорун түзүп, алардын арасындагы бурчту аныктагыла. Мында $\vec{AB}=-a\vec{i}+2a\vec{k}$, $\vec{AC}=a\vec{i}+a\vec{k}$ экендиги ачык. Демек, алардын арасындагы бурч (8) боюнча табылат:

$$\cos\varphi=\frac{-a\cdot a+2a\cdot a}{\sqrt{a^2+4a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{5a^2}\cdot\sqrt{2a^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\approx0{,}316;\ \varphi\approx71^\circ35'.$$

3. $T=(2\vec{i}-\vec{j})\cdot\vec{j}+(\vec{j}-2\vec{k})\cdot\vec{k}+(\vec{i}-2\vec{k})^2$ туюнтмасындагы кашааларды ачкыла.

Скалярдык көбөйтүүнүн бөлүштүрүү касиети боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$T=2\vec{i}\cdot\vec{j}-\vec{j}\cdot\vec{j}+\vec{j}\cdot\vec{k}-2\vec{k}\cdot\vec{k}+\vec{i}^2-4\vec{i}\cdot\vec{k}+4\vec{k}^2,$$

мында $\vec{i}\cdot\vec{j}=0, \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{k}^2=1,\ \vec{i}^2=1,\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0$ болгондуктан:

$$T=-1-2+1+4=2$$

келип чыгат.

V глава. МЕЙКИНДИКТЕГИ АНАЛИТИКАЛЫК ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Мейкиндиктеги эки чекиттин аралыгы

Мейкиндикте $A(x_1, y_1, z_1)$ жана $B(x_2, y_2, z_2)$ эки чекити берилип, алардын арасындагы аралыкты табуу керек болсун. Бул чекиттердин $\vec{r_1}\{x_1, y_1, z_1\}$ жана $\vec{r_2}\{x_2, y_2, z_2\}$ радиус векторлорун жүргүзсөк, $\vec{AB}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$ болору белгилүү. Анын координаталары: x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 болушат (31-чийме). Демек, A жана B чекиттеринин арасындагы аралык

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

Эми AB кесиндисин мурдатан берилген λ катышында бөлүүчү $N(x, y, z)$ чекитин аныктоо керек болсун, б. а. $\frac{\vec{AN}}{\vec{NB}}=\lambda$ болгудай N чекити изделсин. Бул катышты

$$\vec{AN}=\lambda\cdot\vec{NB} \tag{2}$$

түрүндө жазууга болот. Мындагы $\vec{AN}$ векторунун координаталары $\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$, ал эми $\vec{NB}$ векторунуку $\{x_2-x, y_2-y, z_2-z\}$ болору белгилүү (31-чийме).

Буларды (2) коюп, тиешелүү координаталарын барабарласак:

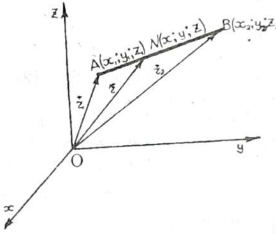
$$\begin{aligned} x-x_1&=\lambda(x_2-x), \\ y-y_1&=\lambda(y_2-y), \\ z-z_1&=\lambda(z_2-z) \end{aligned} \tag{3}$$

келип чыгат. Алардын ар биринен:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{4}$$



31-чийме

экендиги табылат. Булар AB кесиндисин λ катышында бөлүүчү чекиттин координаталары болушат. AB кесиндисин тең экиге бөлүүчү $N_0(x_0, y_0, z_0)$ чекиттин координаталары:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z_0=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{5}$$

болот, анткени $\lambda=1$.

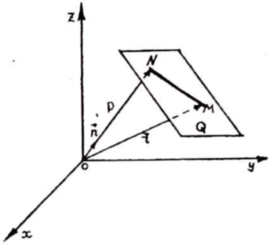
§ 2. Тегиздиктин нормалдуу теңдемеси

Мейкиндикте каалагандай Q тегиздиги берилсин. Координаталар башталмасынан ага түшүрүлгөн p перпендикуляр тегиздикти N чекитинде кесип өтсүн.

$\vec{n}$ вектору Q тегиздигине перпендикуляр болгон жана $\overrightarrow{ON}$ вектору менен бирдей багытталган вектордун бирдик вектору болсун:

$$\vec{n}\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\},\ |\vec{n}|=1,\ |\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1.$$

Q тегиздигинен каалагандай $M(x, y, z)$ чекитин алып, анын $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ радиус-векторун түзөбүз, ал $\vec{r}=\overrightarrow{OM}\{x, y, z\}$ координаталарына ээ болот.



32-чийме

Эми $\vec{r}$ векторун $\vec{n}$ ге проекциялайбыз, анда

$$\text{пр}_{n}\vec{r}=p \qquad (1)$$

болору ачык. Бул (1) барабардык Q тегиздигинде жатуучу бардык чекиттер үчүн аткарылат. Ал барабардык Q тегиздигинин чекиттери үчүн гана аткарылгандыктан, ал (1) теңдеме ошол Q тегиздигинин теңдемеси болот.

Эгер $(\vec{r}\cdot\vec{n})$ скалярдык көбөйтүндүсү $(\vec{r}\cdot\vec{n})=|\vec{n}|\cdot\text{пр}_{n}\vec{r}=\text{пр}_{n}\vec{r}$ түрүндө жазыларын эске алсак (1) теңдемени

$$(\vec{r}\cdot\vec{n})=p \text{ же } (\vec{r}\cdot\vec{n})-p=0 \qquad (2)$$

түрүндө жазууга болот. Бул (2) теңдеме *тегиздиктин вектордук формадагы нормалдуу* теңдемеси деп аталат.

Ал эми координаталары менен берилген $\vec{r}\{x, y, z\}$ жана $\vec{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсүнүн IV гл. § 5 тагы (4) формуласын колдонсок, (2) теңдеме

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (3)$$

түрүндө жазылат. Бул (3) теңдеме *тегиздиктин координаталык формадагы нормалдык теңдемеси* деп аталат.

§ 3. Тегиздиктин жалпы теңдемеси жана аны изилдөө

Тегиздиктин нормалдык теңдемесинде x, y, z координаталары биринчи даражада катышарын көрүп турабыз. Эми x, y, z ке карата биринчи даражадагы жалпы:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (4)$$

теңдемесин алабыз да, ал кандайдыр бир тегиздиктин теңдемеси болорун далилдейбиз, мындагы A, B, C коэффициенттери бир мезгилде нөл болуулары тийиш эмес.

(4) теңдемени азырынча аныкталбаган $M\neq 0$ көбөйтүүчүсүнө көбөйтүп:

$$MAx+MBy+MCz+MD=0 \qquad (5)$$

теңдемесине келебиз. Бул (5) теңдеме (4) кө эквиваленттүү, ошондуктан бул эки теңдеме бир эле геометриялык фигуранын теңдемеси болушат.

Эми M көбөйтүүчүсүн (5) теңдеме тегиздиктин (3) нормалдуу теңдемеси болгудай кылып тандап алууга аракеттенебиз. (3) жана (5) теңдемелердеги x, y, z тин коэффициенттерин жана бош мүчөлөрүн барабарлап:

$$MA=\cos\alpha,\ MB=\cos\beta,\ MC=\cos\gamma,\ MD=-p \tag{6}$$

экендигине ээ болобуз. Биринчи үчөөнү квадратка көтөрүп, мүчөлөп кошуп жана $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ экендигин эске алсак:

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{7}$$

келип чыгат. Мындагы радикалдын сыртындагы белгини MD көбөйтүндүсү терс болгудай кылып, б. а. D нын белгисине карама-каршы кылып тандап алуу керек. Ошентип, (4) теңдемени нормалдуу түргө келтирүүчү M көбөйтүүчүсүн табууга болот. Демек, (4) теңдеме да кандайдыр бир тегиздиктин теңдемеси болот.

Бул (4) теңдеме *тегиздиктин жалпы теңдемси* деп аталат. (4) тегиздикке перпендикулярдуу болгон $\vec{n}$ вектордун координаталары $\vec{n}(A, B, C)$ болот. (6) формулаларга M дин маанисин коюп, жалпы учурда:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{8}$$

$$\cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{9}$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{10}$$

$$p=\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{11}$$

формулаларына ээ болобуз.

Эми тегиздиктин жалпы теңдемесин изилдейбиз.

1. Эгер $D=0$ болсо, анда (4) теңдеме

$$Ax+By+Cz=0 \tag{12}$$

түрүнө келет. Бул учурда $p=0$ болуп, тегиздик координаталар башталмасы аркылуу өтөт.

2. Эгерде $C=0$ болсо, (4) теңдеме $Ax+By+D=0$ түрүнө келет. Мында (10) боюнча $\cos\gamma=0$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$ болуп, тегиздикке түшүрүлгөн нормаль Oz огу менен $\frac{\pi}{2}$ бурчун түзөт, демек тегиздик Oz огуна параллель болот.

3. Ушул сыяктуу эле эгер $B=0$ болсо, $Ax+Cz+D=0$ тегиздиги Oy огуна параллель болот.

4*

4. $A=0$ болгон кездеги $By+Cz+D=0$ тегиздиги Ox огуна параллель болот.

5. Эгер $A=0$ жана $D=0$ болсо, (4) теңдеме $By+Cz=0$ түрүнө келет. Мында $A=0$ болгондуктан, бул тегиздик Ox огуна параллель, ал эми $D=0$ болгондуктан координаталар башталмасы аркылуу өтөт. Демек, бул тегиздик Ox огу аркылуу өтөт.

6. $B=0$ жана $D=0$ болгон $Ax+Cz=0$ тегиздиги Oy огу аркылуу өтөт.

7. $C=0$ жана $D=0$ болгон $Ax+By=0$ тегиздиги Oz огу аркылуу өтөт.

8. Эгер $A=0$, $B=0$, $C\neq0$ болсо, $Cz+D=0$ же $z=-\frac{D}{C}$ тегиздигине ээ болобуз. Бул тегиздиктин бардык чекиттери үчүн z турактуу, демек ал xOy тегиздигине параллель болот.

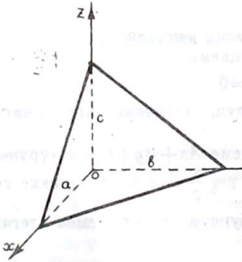
9. $A=0$, $C=0$, $B\neq0$ болгон $By+D=0$ тегиздиги xOz тегиздигине параллель болот.

10. $A\neq0$, $B=0$, $C=0$ болгон $Ax+D=0$ тегиздиги yOz тегиздигине параллель.

11. $A=0$, $B=0$, $D=0$, $C\neq0$ болгон $Cz=0$ же $z=0$ тегиздиги xOy тегиздиги менен дал келишет.

12. Ушул сыяктуу эле $x=0$ жана $y=0$ теңдемелери ирети менон yOz жана xOz тегиздиктерин туюнтат.

$D\neq0$ болуп, координаталар башталмасы аркылуу өтпөгөн (4) жалпы теңдеме менен берилген тегиздикти түзүү үчүн, анын координаталар окторунан кесип өткөн кесиндилерин аныктоо оңой. Ал үчүн $x=0$, $z=0$ десек, $By+D=0$ болуп, андан Oy огунан кесип өткөн $b=-\frac{D}{B}$ кесиндиси табылат. Ал тегиздиктин Ox жана Oz окторунан кесип өткөн кесиндилер $a=-\frac{D}{A}$, $c=-\frac{D}{C}$ болору ачык. Бул үч кесинди боюнча тегиздик оңой эле түзүлөт (33-чийме).



33-чийме

Мисалдар. 1. $2x+3y+6z-12=0$ тегиздигин түзгүлө, анын нормалынын координаталар октору менен түзгөн бурчун аныктагыла.

Мында $x=0$, $y=0$ десек, $c=2$; $y=0$, $z=0$ десек, $a=6$; $x=0$, $z=0$ десек, $b=4$ кесиндилерине ээ болобуз. Демек, бул тегиздик үч окту тең кесип өтүүчү жантык тегиздик болот. Ага түшүрүлгөн нормалдын багыттоочу косинустары (8), (9), (10) формулаларынан аныкталат. $A=2$, $B=3$, $C=6$ болгондуктан:

$$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\pm\sqrt{4+9+36}=\pm7.$$

Теңдемеде $D=-12$ терс болгондуктан биз плюс белгисин алабыз.

Ошентип, $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$ болот.

2. $M_1(0, -1{,}3)$ жана $M_2(1, 3{,}5)$ чекиттери берилген. M_1 чекити аркылуу өтүп, M_1M_2 векторуна перпендикуляр болгон тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

Эң мурда $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторунун координаталарын аныктайбыз, Ал $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\} = \overrightarrow{M_1M_2}\{1,\ 4,\ 2\}$ болот. Шарт боюнча изделген тегиздик $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторуна перпендикуляр болгондуктан, тегиздиктин p нормалы $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторуна параллель болот. Демек, анын багыттоочу косинустары:

$$\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|},\quad \cos\beta = \frac{y_2-y_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|},\quad \cos\gamma = \frac{z_2-z_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}$$

боюнча табылат. Мында

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$$

болгондуктан $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{21}}$, $\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{21}}$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{21}}$ болот.

Тегиздиктин $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0$ номалдык теңдемесин жазуу үчүн нормалдын p узундугун аныктоо керек. Аны, тегиздик $M_1(0, -1{,}3)$ чекити аркылуу өтөт деген шарттан аныктайбыз.

p белгисиз кезинде изделген тегиздиктин теңдемеси $\frac{x}{\sqrt{21}} + \frac{4y}{\sqrt{21}} + \frac{2z}{\sqrt{21}} - p = 0$ болот. $M_1(0, -1, 3)$ чекити аркылуу өтсүн десек, $-4+6=\sqrt{21}\cdot p$, же $p = \frac{2}{\sqrt{21}}$ табылат. Аны p нын ордуна коюп, бөлүмдөн кутулсак: $x+4y+2z-2=0$ теңдемесине ээ болобуз. Изделген тегиздик ушул.

3. M_1 $(-4, 0{,}4)$ чекити аркылуу өтүп, Ox жана Oy окторунан $a=4$ жана $b=3$ кесиндилерин кесип өтүүчү тегиздиктин теңдемесин жазгыла.

Шарт боюнча $a=4$, $b=3$ болгондуктан, тегиздиктин Ox, Oy окторунан кесип өтүүчү $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$ кесиндилерине коюп, $A = -\frac{D}{4}$, $B = -\frac{D}{3}$ экендигин табабыз.

Тегиздикти $Ax+By+Cz+D=0$ жалпы теңдеме түрүндө издейбиз. Ал тегиздик $M(-4, -0{,}4)$ чекити аркылуу өтсүн десек: $-4A+4C+D=0$ болот. $-4A=D$ болгондуктан $D+4C+D=0$ же $C = -\frac{D}{2}$ болот. A, B, C лардын ушул маанилерин жалпы теңдемеге коюп, D га кыскартсак, изделген $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ теңдеме келип чыгат.

§ 4. Эки тегиздиктин арасындагы бурч. Тегиздиктердин параллелдик жана перпендикулярдык шарттары

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ жана $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ эки тегиздигинин арасындагы бурч деп, аларга перпендикуляр болушкан $\vec{n_1}\{A_1, B_1, C_1\}$ жана $\vec{n_2}\{A_2, B_2, C_2\}$ эки векторунун арасындагы бурчту түшүнүү керек. Демек, IV глава, § 6 боюнча ал бурч:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{13}$$

формуласынан аныкталат.

Эгерде эки тегиздик перпендикуляр болушса, б. а. $\varphi=\frac{\pi}{2}$ болсо, анда (13) дөн:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{14}$$

шарты келип чыгат.

Эгер эки тегиздик параллель болушса, анда $\vec{n_1}$ жана $\vec{n_2}$ дагы параллель болушат, демек эки тегиздиктин параллелдик шарты

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{15}$$

түрүндө болот (IV гл. § 6, (10) формула).

Мисалдар. 1. $3x-2y+z-4=0$ жана $9x-6y+3z-22=0$ тегиздиктеринин параллель экендигин көрсөткүлө. Мында $A_1=3$, $B_1=-2$, $C_1=1$, ал эми $A_2=9$, $B_2=-6$, $C_2=3$ болгондуктан: $\frac{3}{9}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$болуп, (15) шарт аткарылат. Демек, бул тегиздиктер параллель.

2. $x+y-z=0$ жана $3x+3y+6z-2=0$ тегиздиктеринин өз ара перпендикуляр экендигин көрсөткүлө. Мында $1\cdot3+1\cdot3+(-1)\cdot6=$ $=0$, демек бул эки тегиздик өз ара перпендикуляр, анткени (14) шарт аткарылды.

3. $x+y+z-1=0$ жана $2x-3y-z-6=0$ эки тегиздигинин арасындагы бурчту аныктагыла. Мында $A_1=1$, $B_1=1$, $C_1=1$ жана $A_2=2$, $B_2=-3$, $C_2=-1$ болгондуктан, (13) боюнча:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot2+1\cdot(-3)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{4+9+1}} = \frac{-2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{2}{\sqrt{42}}$$

болот. Мындан φ таблица боюнча аныкталат. Бул сапар φ кең бурч болот, ошондуктан анын 180° ка чейинки толуктоосун алуу керек.

§ 5. Мейкиндиктеги түз сызыктын теңдемелери

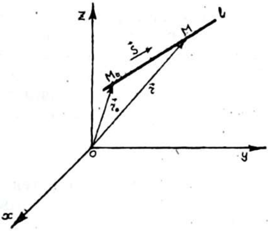
Мейкиндикте каалагандай $\vec{s}\{m, n, p\}$ вектору жана $M_0(x_0, y_0, z_0)$ чекити аркылуу өтүп, $\vec{s}$ векторуна параллель болгон l түз сызыгы берилсин. $\vec{s}$ вектору түз сызыктын *багыттоочу вектору* деп аталат. Ал түз сызыктын каалагандай М (x, y, z) чекитин алсак, $\overrightarrow{M_0M}$ вектору $\vec{s}$ векторуна параллель болот. M_0 жана M чекиттеринин $\vec{r}_0$ жана $\vec{r}$ радиус-векторлорун түзөбүз, анда (34-чийме):

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\overrightarrow{M_0M} \qquad (1)$$

болору ачык. $\overrightarrow{M_0M}$ вектору менен $\vec{s}$ коллиенардуу болгондуктан $\overrightarrow{M_0M}=\vec{s}t$ түрүндө туюнтулары белгилүү. Демек, $\vec{r}-\vec{r}_0=\vec{s}t$ же

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{s}t \qquad (2)$$

теңдемеси келип чыгат, мында t параметр.



34-чийме

Түз сызыктын каалагандай $M(x, y, z)$ чекитинин координаталары ушул (2) теңдемени канааттандырат, ал түз сызыкта жатпаган эч бир чекиттин координаталары бул теңдемени канааттандырбайт. Ошондуктан (2) теңдеме *l түз сызыгынын вектордук теңдемеси* деп аталат.

Ал эми $\vec{r}\{x, y, z\}$, $\vec{r}_0\{x_0, y_0, z_0\}$, $\vec{s}\{m, n, p\}$ болгондуктан (2) теңдемени координаталар аркылуу туюнтуп, бир аттуу координаталарын барабарласак:

$$\begin{aligned} x&=x_0+mt,\\ y&=y_0+nt,\\ z&=z_0+pt \end{aligned} \qquad (3)$$

теңдемесине келебиз. Бул (3) теңдеме түз сызыктын параметрдик теңдемеси деп аталат. Ал эми (3) дөгү ар бир теңдемени t га карата чыгарып, аларды барабарласак:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (4)$$

теңдемеси келип чыгат. Бул *түз сызыктын каноникалык теңдемеси* деп аталат.

l түз сызыгы координаталар октору менен α, β, γ бурчтарын түзсө, $\vec{s}$ вектору дагы ошол эле бурчтарды түзөт. $\vec{s}$ векторунун окторго болгон проекциялары m, n, p болгондуктан

$$m=|s|\cdot\cos\alpha,\ n=|\vec{s}|\cdot\cos\beta,\ p=|\vec{s}|\cdot\cos\gamma \qquad (5)$$

болору белгилүү. Мында $|\vec{s}|=\sqrt{m^2+n^2+p^2}$ болгондуктан (5) ден:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha&=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\beta&=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos j&=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

экендигин аныктайбыз. $\vec{s}$ вектору нөлдүк вектор болбогондуктан m, n, p үчөө бир мезгилде нөлгө барабар боло албайт. l түз сызыгын $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ жана $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ эки тегиздигинин кесилиши катары да аныктоого болот. Чынында эле бул эки тегиздиктин кесилишинде l түз сызыгында жаткан $M(x, y, z)$ чекитинин координаталары:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned} \tag{7}$$

теңдемелеринин экөөнү тең канааттандырат, анткени ал чекит эки тегиздикте тең жатат. Мына ошондуктан (7) теңдемелер l түз *сызыгынын жалпы теңдемеси* деп аталат. Ал эми

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{8}$$

теңдемеси дагы l түз сызыгы аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемеси болот, анткени ал x, y, z ке карата биринчи даражалуу теңдеме. Мындагы k га ар кандай маани берип, l түз сызыгы аркылуу өтүүчү бардык тегиздиктердин теңдемесине ээ болобуз. Ошондуктан (8) теңдеме l түз сызыгы аркылуу өтүүчү *тегиздиктердин таңгагынын теңдемеси* деп аталат.

Эгерде $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ жана $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ (10)

эки түз сызыгынын арасындагы φ бурчун табуу керек болсо, аларга параллель болушкан $\vec{s_1}\{m_1, n_1, p_1\}$ жана $\vec{s_2}\{m_2, n_2, p_2\}$ векторлорунун арасындагы бурчту табуу жетиштүү болот. Ал бурч

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\pm\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{11}$$

формуласы менен аныкталары белгилүү. Демек, (9) жана (10) эки түз сызыктын перпендикулярдык шарты:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \tag{12}$$

болот, ал эми параллелдик шарты:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{13}$$

болот. Эми $M_1(x_1, y_1, z_1)$ жана $M_2(x_2, y_2, z_2)$ эки чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазуу талап кылынсын. Анын теңдемесин жазуу үчүн ошол түз сызык өтүүчү бир чекит жана багыттоочу вектор белгилүү болсо жетиштүү. Ал чекит үчүн $M_1(x_1, y_1, z_1)$ чекитин, багыттоочу вектор үчүн $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторун алабыз. Бул вектордун координаталары: x_2-x_1, y_2-y_1 жана z_2-z_1 болору белгилүү. Демек, эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын каноникалык теңдемеси.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{14}$$

Мисалдар. 1. $M_0(4, 3, 0)$ чекити аркылуу өткөн жана $\overrightarrow{s}\{-1, 1, 1\}$ векторуна параллель болгон түз сызыктын теңдемесин жазгыла. Анын xOz тегиздигиндеги изин тапкыла да, ал түз сызыктын өзүн түзгүлө. Мында $m=-1$, $n=1$, $p=1$, ал эми $x_0=4$, $y_0=3$, $z_0=0$ болгондуктан (4) боюнча: $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$ теңдемесин жазабыз. Анын yOz тегиздигиндеги изин табуу үчүн бул теңдемеге $x=0$ деп коюш керек, анда $\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}=4$ же $y=7$, $z=4$ теңдемелерине ээ болобуз, демек $N_0(0, 7, 4)$ чекити изделген из болот.

2. $M_1(-1, 2, 3)$ жана $M_2(2, 6, -2)$ чекиттери аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесин жазгыла жана анын багыттоочу косинустарын аныктагыла. Мында (14) боюнча изделген түз сызык:

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-3}{-2-3} \text{ же } \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5} \text{ болот.}$$

Анын багыттоочу косинустары (6) боюнча табылат:

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{9+16+25}}=\frac{3}{5\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{10}=0{,}3\sqrt{2};$$

$$\cos\beta=\frac{4}{5\sqrt{2}}=0{,}4\sqrt{2};\ \cos\gamma=-\frac{5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-0{,}5\sqrt{2}.$$

3. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z}{2}$ жана $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+4}{-1}$

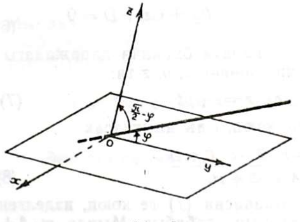
түз сызыктарынын арасындагы бурчту аныктагыла.

Мында $m_1=2$, $n_1=-8$, $p_1=2$ жана $m_2=2$, $n_2=-2$, $p_2=-1$ болгондуктан (11) боюнча:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 2+(-8)\cdot(-2)+2(-1)}{\pm\sqrt{4+64+4}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{18}{\sqrt{72}\cdot\sqrt{9}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

келип чыгат. Демек, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ же $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

§ 6. Түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурч, алардын кесилиши



35-чийме

Түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурч деп, түз сызык менен анын тегиздиктеги проекциясынын арасындагы жандаш бурчтардын каалаганын айтышат (35-чийме). Төмөнкүдөй:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{1}$$

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурчту табуу керек болсун. Бул бурч үчүн $\varphi<\frac{\pi}{2}$ болгон тар бурчту алабыз да, анын синусун табабыз. Мында 35-чиймеден көрүнүп тургандай $\frac{\pi}{2}-\varphi$ бурчу, (1) түз сызык менен тегиздиктин перпендикулярынын арасындагы бурч болуп калат. Ал экөөнүн арасындагы $\frac{\pi}{2}-\varphi$ бурчунун косинусу тегиздикке түшүрүлгөн перпендикулярдын A, B, C багыттоочу коэффициенттерин жана берилген түз сызыктын $m, n,$ р багыттоочу коэффициенттери аркылуу § 5 тин (11) формуласынан табылат. Ал эми $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$ болгондуктан:

$$\sin\varphi=\frac{|m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{3}$$

формуласы келип чыгат. Эгерде (1) түз сызык менен (2) тегиздик параллель болушса, анда $\varphi=0$ б. а. $\sin\varphi=0$ болууга тийиш. (3) боюнча параллелдиктин:

$$m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C=0 \tag{4}$$

шартына ээ болобуз.

(1) түз сызык менен (2) тегиздиктин перпендикулярдык шарты ушул түз сызык менен тегиздиктин перпендикулярынын (б. а. $\vec{n}(A, B, C)$ вектордун параллелдик шарты менен дал келишет. Демек,

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \tag{5}$$

барабардыгы түз сызык менен тегиздиктин перпендикулярдык шарты болот.

Эгерде (1) түз сызык менен (2) тегиздиктин кесилишкен чекитин табуу керек болсо, ал эки теңдемени система катары карап, бирге чыгаруу керек, анткени экөө кесилишкен $M_0(x_0, y_0, z_0)$ чекити түз сызыкта да, тегиздикте да жатат, ошондуктан эки теңдемени тең канааттандырууга тийиш. Мындагы (1) теңдемедеги барабар катыштарды белгисиз t аркылуу белгилеп:

$$\frac{x-a}{m}=t,\ \frac{y-b}{n}=t,\ \frac{z-c}{p}=t,\ \ Ax+By+Cz+D=0 \tag{6}$$

түрүндөгү x, y, z, t белгисиздерине карата биринчи даражадагы төрт теңдемеге ээ болобуз. Биринчи үчөөнөн x, y, z ти:

$$x=a+mt,\ y=b+nt,\ z=c+pt \tag{7}$$

таап, (6) нын акыркы теңдемесине коюп, t ны аныктасак:

$$t=-\frac{a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C+D}{mA+nB+pC} \tag{8}$$

экендиги келип чыгат. t нын бул маанисин (7) ге коюп, изделген кесилишүү чекитинин координаталарын табабыз. Мында $m\cdot A+$

$+n\cdot B+p\cdot C\neq 0$ болсо, түз сызык тегиздикти бир гана чекитте кесип өтөт, анткени бул учурда t белгилүү бир чектүү мааниге ээ болот.

Эгер
$$m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C=0,\ a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C+D\neq 0 \tag{9}$$
болсо, анда түз сызык тегиздикке параллель болот, анткени (9) нун биринчиси параллелдик шарт, ал эми экинчиси боюнча $M_0(a,\ b,\ c)$ чекити (2) тегиздиктин сыртында жатат.

Эгер
$$m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C=0,\ a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C+D=0 \tag{10}$$
болсо, анда (1) түз сызык (2) тегиздиктин үстүндө жатат, анткени бул сапар $M_0(a,\ b,\ c)$ чекити (2) тегиздикте жатат.

Мисалдар. 1. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$ түз сызыгы $2x+y-z=0$ тегиздигине параллель экендигин, ал

түз сызык ошол тегиздикте жата тургандыгын көрсөткүлө.

а) эң мурда биринчи бөлүгүн карайлы. Мында $A=2$, $B=1$, $C=-1$, $D=0$, ал эми $m=2$, $n=-1$, $p=3$ болгондуктан (4) шартты текшерип көрөбүз. Ал $2\cdot 2+(-1)\cdot 1+3\cdot(-1)=0$ болгондуктан, мисалдагы биринчи түз сызык менен тегиздик параллель.

б) Бул түз сызык үчүн: $a=-1$, $b=-1$, $c=-3$. Эгер (10) дагы эки барабардык тең орундалса, анда мисалдагы экинчи түз сызык берилген тегиздикте жатат. Биринчиси орундаларын көрдүк, экинчисин текшерип көрөлү:
$$a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C+D=(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-3)\cdot(-1)+0=0.$$
Демек, экинчиси түз сызык берилген тегиздикте жатат.

2. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ түз сызыгы менен $x+2y+3z-29=0$ тегиздигинин кесилишкен чекитин тапкыла.

Эгер, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}=t$ десек, $x=2t$, $y=t+1$, $z=2t-1$ болору белгилүү. Буларды тегиздиктин теңдемесине коёбуз:
$$2t+2(t+1)+3(2t-1)-29=0.$$
Мындан, $t=3$ табылат. t нын бул маанилерин коюп: $x=6$, $y=4$, $z=5$ экендигин табабыз. Демек, берилген түз сызык менен тегиздик $M_0(6,\ 4,\ 5)$ чекитинде кесилишет.

§ 7. Түз сызыктын жалпы теңдемесин канондук түргө келтирүү

Эми түз сызыктын:
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{1}$$
жалпы теңдемесин каноникалык

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{2}$$

түргө келтирүү талап кылынсын. Мындай теңдемени жазуу үчүн түз сызыкта жатуучу бир чекиттин жана багыттоочу вектордун проекциялары белгилүү болушу жетиштүү.

Андай $M_1(x_1, y_1, z_1)$ чекитти (1) теңдемелерден x, y, z тин бирине, маселен, x ке каалагандай x_1 маанисин бериц, калган y менен z ти:

$$\begin{cases} B_1y+C_1z=-D_1-A_1x_1 \\ B_2y+C_2z=-D_2-A_2x_1 \end{cases} \tag{3}$$

системасын чыгарып аныктайбыз.

Андан кийин ушундай эле жол менен дагы бир $M_2(x_2, y_2, z_2)$ чекитин тапсак, $\overrightarrow{M_1M_2}$ вектору багыттоочу вектор болот. Анын координаталары $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ экендиги белгилүү Ошондуктан түз сызык эми:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{4}$$

каноникалык теңдемеси менен туюнтулат.

Мисал. $y=3x-1$, $2z=-3x+2$ түз сызыгы менен $2x+y+$ $+z-4=0$ тегиздигинин арасындагы бурчту тапкыла.

Мында түз сызык: $3x-y-1=0$ жана $3x+2z-2=0$ тегиздиктеринин кесилиши катары берилген. Ошондуктан эң мурда ушул түз сызыктын каноникалык теңдемесин жазабыз. $z_1=1$ болсун дейлик, анда экинчи теңдемеден $x_1=0$, биринчисинен $y_1=-1$ табылат. Ошентип, бир чекит $M_1(0; -1, 1)$ болот. Эми $z_2=4$ десек, $x_2=-2$, $y_2=-7$, табылат да, экинчи чекит $M_2(-2, -7, 4)$ болот. Мында $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}=\overrightarrow{M_1M_2}\{-2, -6, 3\}$ болору белгилүү. Демек, берилген түз сызыктын каноникалык теңдемеси: $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-1}{3}$ болот. Бул түз сызык менен берилген тегиздиктин арасындагы бурч § 6 дагы (3) формуладан табылат:

$$\sin\varphi=\frac{|(-2)\cdot 2+(-6)\cdot 1+3\cdot 1|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+36+9}}=\frac{7}{7\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

φ нин маанилерин таблицадан тапкыла.

§ 8. Беттердин теңдемелери. Сфера

Эми экинчи тартиптеги беттерди кароого киришебиз. Декарттык координаталарга карата экинчи даражадагы алгебралык теңдемелер менен туюнтулуучу геометриялык фигураларды *экинчи тартиптеги беттер* деп аташат.

Биздин алдыбызга геометриялык касиети боюнча беттин теңдемесин түзүү жана теңдемеси боюнча бетти изилдеп, касиетин аныктоо маселеси коюлсун.

Экинчи тартиптеги беттердин эң жөнөкөйү болгон сферанын теңдемесин түзүүгө токтолобуз.

Аныктама. *Берилген чекиттен (борбордон) бирдей аралыкта туруучу, мейкиндиктин чекиттеринин геометриялык орду* ***с ф е р а*** *деп аталат.*

Ушул аныктама боюнча, сферанын теңдемесин чыгарабыз. Берилген чекит, б. а. сферанын борбору $O_1(a, в, c)$, радиусу R болсун. Изделген сферада жаткан каалагандай чекит $M(x, y, z)$ болсун десек, аныктама боюнча: $O_1M=R$ болууга тийиш. Ал эми $O_1M=\sqrt{(x-a)^2+(y-в)^2+(z-c)^2}$ болгондуктан, муну R ге барабарлап, квадратка көтөрсөк:

$$(x-a)^2+(y-в)^2+(z-c)^2=R^2 \tag{1}$$

теңдемесине ээ болобуз. Бул борбору $O_1(a, в, c)$ чекитинде жаткан R радиустуу сферанын теңдемеси болот, анткени аны сферанын чекиттеринин гана координаталары канааттандырат.

Эгер сферанын борбору координаталар башталмасы менен дал келсе, анда $a=в=c=0$ болуп сферанын теңдемеси:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{2}$$

түрүнө келет.

М и с а л. $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$ сферасынын борборун жана радиусун аныктагыла.

Аны $(x^2-3x)+(y^2+5y)+(z^2-4z)=0$ түрүндө жазып алып, ар бир кашааны толук квадратка чейин толуктайбыз:

$$\left(x^2-2\cdot\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+\left(y^2+2\cdot\frac{5y}{2}+\frac{25}{4}\right)-\frac{25}{4}+(z^2-2\cdot 2z+4)-4=0$$

же

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+\left(z-2\right)^2=\frac{50}{4}.$$

Демек, берилген сферанын борбору $O_1\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ 2\right)$ чекити, ал эми радиусу $R=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{\sqrt{2}}$ болот.

§ 9. Айлануу беттери

Кандайдыр бир K сызыгы, кыймылсыз l огун айланганда бет түзүлсө, анда ал *айлануу огу l болгон айлануу бети* деп аталат.

Эгерде беттин, тик бурчтуу координаталар системасындагы теңдемеси $F(x, y^2+z^2)=0$ түрүндө болсо, анда ал бет айлануу огу Ox болгон айлануу бети болот. Чындыгында эле, эгер $M_0(x_0, y_0, z_0)$ чекити ошол бетте жатса, анда борбору Ox огунда жатып, M_0 аркылуу өткөн беттин каалагандай $M(x, y, z)$ чекити үчүн:

$$x=x_0,\ y^2+z^2=y_0^2+z_0^2$$

барабардыгы орундалат. Демек, $M(x, y, z)$ чекитинин координаталары дагы каралып жаткан беттин теңдемесин канааттандырат.

Ал эми бетти борборлору Ox огунда жаткан айланалардан түзүлгөн деп кароого болгондуктан, $F(x, y^2+z^2)=0$ бети Ox огунун айланасында айлануудан түзүлгөн бет болот. Ошол сыяктуу эле $F(x^2+z^2, y)=0$ теңдемеси айлануу огу Oy болгон, ал эми $F(x^2+y^2, z)=0$ теңдемеси айлануу огу Oz болгон айлануу бетинин теңдемеси болот.

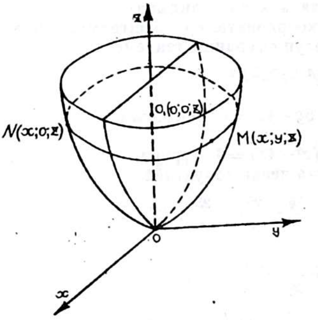
1. Параболоиддик айлануунун теңдемеси.

Теңдемеси

$$X^2=2pZ \tag{1}$$

болгон, X_0Z тегиздигинде OZ огуна карата симметриялуу парабола OZ огунда айлансын дейлик. Мындай айланууда *параболоиддик айлануу бети* деп аталуучу бет пайда болот.

$M(x, y, z)$ параболоиддик айлануунун каалагандай чекити болсун. Анда бул чекитти (1) параболада жатуучу $N(x_1, O_1, z_1)$ чекитинин OZ огундагы O_1 $(0, 0, z)$ борборунун айланасында айлануусунан түзүлөт деп кароого болот. Бул M жана N чекиттери бир эле горизонталь тегиздикте жатып жана O_1 ден бирдей алыстыкта болгондуктан, б. а. $O_1M=O_1N$ болгондуктан (36-чийме):



36-чийме

$$X=\sqrt{x^2+y^2},\ Z=z \tag{2}$$

орундалат. Буларды (1) ге койсок:

$$x^2+y^2=2pZ \tag{3}$$

теңдемесине ээ болобуз. Ушул (3) теңдеме параболоиддик айлануунун теңдемеси болот.

Бул теңдеме формалдуу түрдө x^2 ты x^2+y^2 менен алмаштырганда келип чыгат.

Параболоиддик айлануу бетин OZ огуна перпендикуляр тегиздик менен кескенде, кесилиште $z=h$, $x^2+y^2=2ph$ айланасы түзүлөт, аны OX жана OY окторуна параллель тегиздиктер менен кескенде, кесилиште параболалар пайда болот.

2. Эллипсоиддик жана гиперболоиддик айланууларды̆н теңдемелери

xOz тегиздигиндеги $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ эллипсин Oz огунун айланасында айландырганда

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

эллипсоиддик айлануу пайда болот. Ошол эле эллипсти O огунун айланасында айландырса,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2+y^2}{b^2}=1 \tag{5}$$

эллипсоиддик айлануусу түзүлөт.

Ал эми $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ гиперболасын O. аңык огунун айланасында айландырганда

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

бир көңдөйлүү гиперболоиддик айлануу пайда болот (37-чийме).

Эгер $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасы O мнимый огунун айланасында айландырылса, анда *эки көңдөйлүү гиперболоиддик айлануу* бети түзүлөт (37-чийме), анын теңдемеси:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

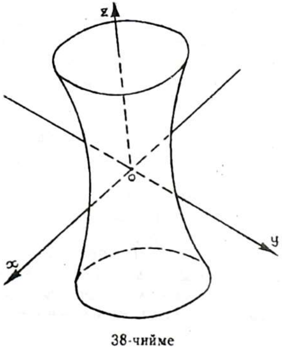
болот.

Бардык айлануу беттерин, айлануу огуна перпендикуляр тегиздик менен кескенде, кесилиште айлана пайда болот. Бирок

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8}$$

теңдемеси менен туюнтулган бет *үч октуу эллипсоид* деп аталат. Бул эллипсоиддик айлануудан башка бет болот. Үч октуу эллипсоидди окторго перпендикуляр тегиздиктер менен кескенде, үч учурунда тең кесилишинде эллипс пайда болот.

37-чийме



38-чийме

II БӨЛҮМ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨР

VI глава. ФУНКЦИЯЛАР ЖАНА АЛАРДЫН ГРАФИКТЕРИ

§ 1. Турактуу жана өзгөрмө чоңдуктар

Табийгаттын тигил же бул кубулушун изилдеп үйрөнүүдө турактуу жана өзгөрмө чоңдуктар менен иш жүргүзүүгө туура келет. Айрым чоңдуктар тигил же бул процессте өзгөрбөй турса, башка бир процессте өзгөрүп турат.

Аныктама. *Дайыма бир гана мааниге ээ болуучу чоңдук абсолюттук турактуу деп, ал эми ар түрлүү мааниге ээ болуп туруучу* чоңдук **ө з г ө р м ө** чоңдук деп аталат. Ал эми кубулуштун процессинде бир мааниге ээ болуучу чоңдукту *турактуу чоңдук* дешет.

Белгилүү бир маселеде гана турактуу болгон чоңдуктарды параметрлер деп аташат. Алсак, айлананын узундугунун анын диаметрине болгон катышы бардык айланалар үчүн $\pi=3{,}14159$ болуп абсолюттук турактуу чоңдук болот. Ар кандай чарчынын диагоналынын жагына болгон катышы: $\sqrt{2}$ да, үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы да абсолюттук турактуу.

Ал эми абанын температурасы, басымы, тигил же бул машинанын кыймылынын ылдамдыгы, өткөн жолдун узундугу ж. б. өзгөрмө чоңдук болот.

Бир эле чоңдук бир шартта турактуу болсо, башка бир шартта өзгөрмө болот. Маселен, бир калыптагы кыймылда ылдамдык турактуу болсо, эркин түшүү кыймылында ылдамдык өзгөрмө чоңдук болуп саналат.

Бардык рационалдык жана иррационалдык сандардын көптүгү анык сандар деп аталары белгилүү.

Аныктама. *Ар кандай a анык санынын абсолюттук чоңдугу деп, ал сан оң болуп же нөл болсо, ошол сандын өзүн, эгер ал сан терс болсо, анын карама-каршы санын айтышат да, $|a|$ аркылуу белгилешет.*

Демек,

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ эгер } a\geqslant 0 \text{ болсо,} \\ -a, \text{ эгер } a<0 \text{ болсо} \end{cases}$$

Маселен, $|7|=7$, $|-3{,}2|=3{,}2$, $|-\sqrt{5}|=\sqrt{5}$, $|0|=0$.

Аныкталышы боюнча абсолюттук чоңдук төмөнкүдөй касиеттерге ээ болот.

1. *$|a|<\varepsilon$ барабарсыздыгы $-\varepsilon<a<\varepsilon$ кош барабарсыздыгына эквиваленттүү.*

2. *Сумманын абсолюттук чоңдугу кошулуучулардын абсолюттук чоңдуктарынын суммасынан чоң эмес:*

$$|a+в|\leqslant|a|+|в|.$$

Бул касиет эки гана кошулуучу үчүн эмес, чектүү сандагы кошулуучулар үчүн да орундалат:

$$|a+в+c+...+l| \leqslant |a|+|в|+|c|+...+|l|.$$

3. Эки сандын айырмасынын абсолюттук чоңдугу ал сандардын абсолюттук чоңдуктарынын айырмасынан кичине эмес: $|a-в| \geqslant |a|-|в|$.

4. $|aв| = |a| \cdot |в|$.

5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Бул эки касиет аныктаманын негизинде оңой эле далилденет.

§ 2. Сегмент жана интервал жөнүндө түшүнүк

1. $a<x<в$ барабарсыздыгын канааттандыра турган бардык x анык сандардын көптүгүн *интервал* деп аташат да, аны $(a, в)$ же $]a, в[$ аркылуу белгилешет. Мында интервалдын a жана $в$ учтары интервалдын өзүнө таандык эмес (39-чийме).

2. $a \leqslant x \leqslant в$ барабарсыздыгын канааттандырган бардык x анык сандардын көптүгүн *сегмент* деп аташат да, аны $[a, в]$ аркылуу белгилешет. Сегменттин a жана $в$ учтары ал сегменттин өзүнө таандык болушат (40-чийме).

39-чийме

40-чийме

3. $a \leqslant x < в$ барабарсыздыгын *жарым сегмент* же *жарым интервал* деп аташып, $[a, в[$ аркылуу белгилешет, анын a учу өзүнө таандык, $в$ учу таандык эмес.

4. $a < x \leqslant в$ барабарсыздыгын *жарым интервал* деп аташып, $]a, в]$ аркылуу белгилешет, мунун a учу өзүнө таандык эмес, $в$ учу таандык.

5. Бүткүл сан огундагы чекиттердин көптүгүн $-\infty < x < +\infty$ барабарсыздыгы, б. а. $]-\infty, +\infty[$ интервалы аркылуу белгилөө кабыл алынган.

6. $x < в$ жана $a < x$ барабарсыздыктарын канааттандырган x анык сандарынын көптүгүн $]-\infty, в[$ жана $]a, +\infty[$ деп белгилешет. Мындагы $]-\infty, +\infty[$, $]-\infty, в[$ жана $]a, +\infty[$ интервалдарын ч е к с и з интервалдар дешет.

§ 3. Функциялар жана алардын графиктери

Аныктама. *Эгерде белгилүү бир эреже боюнча x өзгөрмө чоңдугунун ар бир маанисине y өзгөрмөсүнүн толук аныкталган бир мааниси кандайдыр бир эреженин негизинде туура келип турса, анда y өзгөрмөсү x тен көз каранды болгон фукнция деп аталат.*

Мында x *көз каранды эмес өзгөрмө* деп, же *аргумент* деп аталат, ал эми y болсо *көз каранды өзгөрмө* же *функция* деп аталат.

y функциясы белгилүү бир анык маанилерге ээ болуп тура турган x тин маанилеринин көптүгү *функциянын аныкталуу областы* деп аталат. y функциясы ээ болгон маанилердин көптүгү *функциянын өзгөрүү областы* деп аталат.

Эгер x тин ар бир маанисине y тин бирден гана мааниси туура келсе, функция *бир маанилүү* деп, бир нече мааниси туура келсе, *көп маанилүү* деп аталат.

y өзгөрмөсү x тен функция дегенди:
$y=f(x)$, $y=\varphi(x),\ldots$, $y=y\ (x)$ ж. б. түрүндө белгилешет да, «игрек барабар эф x тен» деп, ж. б. окушат.

x тин x_0 маанисине y тин y_0 мааниси туура келсе, аны $y_0=f(x_0)$ деп белгилешет да, y_0 ду функциянын $x=x_0$ чекитиндеги мааниси дешет. Алсак, $y=x^2$ болсо, $x_0=3$ чекитинде $y_0=f(3)=3^2=9$ маанисине ээ болот.

$y=f(x)$ байланышын, функциялык көз карандылык деп да коюшат. Функциялык көз карандылык түрлүү жолдор менен берилет.

1. Аналитикалык жол. x аргументи менен y функциясынын арасындагы функциялык көз карандылык көбүнчө формулалардын жардамы менен берилет. Мында y тин маанисин табуу үчүн x аргументинин үстүнөн математикалык кандай амал аткаруу керектиги ачык көрүнүп турат. Бул учурда функция аналитикалык жол менен берилди деп айтышат.

Мисалдар: $y=\dfrac{x-3}{2},\ y=\sqrt{1-x^2}+4,\ y=\dfrac{\sqrt{x}-2x}{1+x}$.

2. Функциялык көз карандылык таблица түрүндө да берилет. Алсак, абанын бир күндүк температурасы ар бир саат сайын жазылып,

t	6^{00}	7^{00}	8^{00}	9^{00}	10^{00}	11^{00}	12°	...
T	15°	16°	18°	20°	23°	25°	28°	...

түрүндө берилиши мүмкүн.

3.Функциялык көз карандылык сөз аркылуу бир нече формула менен да берилет. Алсак,

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{эгер } -4\leqslant x<0,\\ 1, & \text{эгер } x=0,\\ 2x, & \text{эгер } 0<x\leqslant 4.\end{cases} \qquad (*)$$

Эми функциянын графиги жөнүндөгү түшүнүккө келебиз. $y=f(x)$ функциясынын *графиги* деп, координаталары ушул функциялык көз карандылык менен байланышкан, тегиздиктин бардык чекиттеринин геометриялык ордун айтышат. Функциянын графигин түзүү үчүн $x_1, x_2..., x_n,...$ аргументтерине туура келген $y_1, y_2,..., y_n,...$ маанилерин таап, тегиздикте: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,... $M_n(x_n, y_n)$,... чекиттерин түзүп, аларды туташтыруу жетиштүү болот.

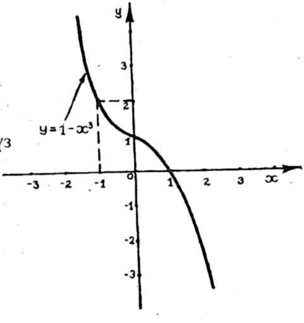
Мисал. $y=1-x^3$ функциясынын графигин түзүү керек болсун. x ке каалаганыбызча маани берип, y ти аныктап, төмөнкүдөй таблица түзөбүз:

x	-2	-1	0	1	2	...	
y	9	2	1	0	-7	...	

Эми $M_1(-2, 9)$, $M_2(-1, 2)$, $M_3(0, 1)$, $M_4(1, 0)$, $M_5(2, -7)$,... чекиттерин түзүп, аларды лекалонун жардамы менен ийри сызык аркылуу туташтырып, берилген функциянын графигине ээ болобуз (41-чийме).

4. Функция график жолу менен да берилет.

Мындай учурда тик бурчтуу координаталар системасында кандайдыр бир график чийилип коюлат. $y=f(x)$ функциясында каалагандай x_1 чекитиндеги маанисин табуу үчүн ал x_1 чекитинен Oy ке параллель түз сызык жүргүзүп, график менен кесилишкен бөлүгүн ченеп алуу жетиштүү болот.



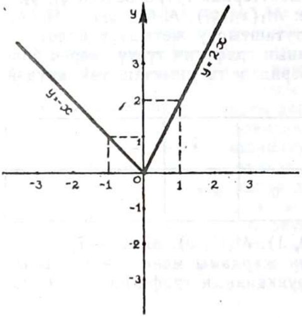
41-чийме

Мисалдар. 1. $y=\sqrt{9-x^2}$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Аныкталуу областын табуу үчүн $y=f(x)$ функциясы белгилүү бир аныкмааниге ээ боло тургандай болгон x тин маанилеринин көптүгүн табуу керек. Радикалдын көрсөткүчү жуп болгондуктан, y аныкмааниге ээ болушу үчүн радикалдын ичиндеги туюнтма нөлдөн чоң же нөлгө барабар болушу керек, б. а. $9-x^2\geqslant 0$. Бул барабарсыздыкты чыгарып, $x^2\leqslant 9$ же $|x|\leqslant 3$ экендигин табабыз. Ал барабарсыздык $-3\leqslant x\leqslant 3$ кош барабарсыздыгына эквиваленттүү экендиги бизге белгилүү. Ошентип, берилген функциянын аныкталуу областы $-3\leqslant x\leqslant 3$ сегменти болот.

2. $y=\dfrac{1}{2-x}$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Бул сапар y аныкмааниге ээ болсун үчүн бөлчөктүн бөлүмү нөлгө барабар эмес болушу керек. Демек $x\neq 2$ болгон бардык x чекиттеринде берилген функция аныкталат.



42-чийме

$x=2$ чекитинде бул функция аныкталбайт. Ошентип, берилген функциянын аныкталуу областы $]-\infty, \ 2[$ жана $]2, +\infty[$ чексиз интервалдары болот.

3. $y=6x-1$ функциясы, бүткүл $]-\infty, +\infty[$ сандык окто аныкталган функция болот.

4. Жогоруда сөз аркылуу берилген (*) функциясынын графигин түзгүлө. Ал функция $[-4, 4]$ сегментинде аныкталган. Сегменттин сол жаккы жарымында $y=-x$ болгондуктан, биз аналитикалык геометриядан билгендей, ал экинчи чейректин биссектрисасы болот. $x=0$ чекитинде $y=1$ маанисине ээ. Ал эми сегменттин экинчи жарымында $y=2x$ түз сызыгын туюнтат. Берилген функциянын графиги 42-чиймеде көрсөтүлгөн.

§ 4. Функциянын түрлөрү жана касиеттери

Биз карап өткөн $y=f(x)$ функциясын кээде айкын түрдө берилген функция деп да коюшат. Берилишине жараша функция бир нече түргө бөлүнөт.

1. Жуп жана так функция. Эгер $f(x)$ үчүн дайыма: $f(-x)=f(x)$ барабардыгы аткарылса, анда $y=f(x)$ *жуп* функция деп аталат. Алсак, $f(x)=x^2$ жуп функция болот, анткени $(-x)^2=x^2$. Мында $f(-x)=f(x)$ болгондуктан жуп функциянын графиги дайыма OY огуна симметриялуу болот.

Эгер бардык x үчүн $f(-x)=-f(x)$ орун алса, анда $f(x)$ *так* функция деп аталат. Маселен, $f(x)=x^3$ функциясы так, анткени $(-x)^3=-x^3$. Так функциянын графиги дайыма координаталар башталмасына карата симметриялуу болот.

2. Монотондуу функциялар. Эгер $y=f(x)$ функциясынын аныкталуу областынан алынган каалагандай $x_1<x_2$ үчүн $f(x_1)<<f(x_2)$ барабарсыздыгы аткарылса, анда $f(x)$ *өсүүчү* функция деп аталат. Эгер каалагандай $x_1<x_2$ үчүн $f(x_1)>f(x_2)$ орун алса, анда $f(x)$ *кемүүчү* функция деп аталат. Дайыма өсүүчү же кемүүчү функцияларды *монотондуу өсүүчү же кемүүчү* функциялар дешет.

Мисалдар. 1. $y=5x$ функциясы монотондуу өсөт, анткени x чоңойгон сайын y да чоңоёт.

2. $y=5-2x$ функциясы монотондуу кемүүчү болот, анткени x чоңойсо, y кемийт, б. а. аргументтин чоң маанисине функциянын кичине мааниси туура келет.

3. Чектелген жана чектелбеген функциялар. Эгер $y=f(x)$ функциясы аныкталган областта дайыма $f(x)\leqslant M$ барабарсыздыгы орундалып, M чектүү сан болсо, анда $f(x)$ функциясы *жогору жагынан чектелген* деп аталат. Эгер чектүү m саны үчүн $m \leqslant f(x)$ орундалса, анда $f(x)$ *төмөн жагынан чектелген* функция деп аталат. Ал эми $m \leqslant f(x) \leqslant M$ аткарылган учурда, $f(x)$ *төмөн жагынан да, жогору жагынан да чектелген* функция деп аталат. Жогору жагынан чектелген функциянын графиги $y=M$ түз сызыгынан төмөн жатат. Төмөн жагынан чектелген функциянын графиги $y=m$ түз сызыгынан жогору жайгашат. Эки жагынан тең чектелген функциянын графиги $y=M$ жана $y=m$ түз сызыктары менен түзүлгөн тилкенин ичинде жатат.

Алсак, $y=x^2$ функциясы төмөн жагынан OX огу менен чектелген, $y=4-x^2$ болсо, жогору жагынан чектелген функция болот. Ал эми $y=\cos 3x$ эки жагынан тең $y=-1$ жана $y=1$ түз сызыктары менен чектелген функция. Графиктерин түзсөңөр буга толук ынанасыңар.

Эки жагынан тең чектелбеген функция *чектелбеген функция* деп аталат. Маселен, $y=\operatorname{tg} x$ эки жагынан тең чектелбеген функция болот, чынында эле тангенсоиданы эч бир тилкенин ичине сыйыштырууга болбойт.

4. Мезгилдүү функциялар. Эгерде x тин бардык маанилери үчүн $f(x+l)=f(x)$ барабардыгы орундалып, мында l ар кандай сан болсо, анда $f(x)$ *мезгилдүү* функция деп аталат. Бул барабардык аткарыла тургандай болгон l дин эң кичине оң мааниси $y=f(x)$ функциясынын *мезгили* деп аталат. Бардык тригонометриялык функциялар мезгилдүү болушат, алардын ичинен $\sin x$ менен $\cos x$ тин мезгили 2π, $\operatorname{tg} x$ менен $\operatorname{ctg} x$ тин мезгили π болот. Мезгилдүү функциялардын бир мезгили ичиндеги графигин түзүү эле жетиштүү, калган мезгилдердеги графиги негизги мезгилдегисинин кайталануусу болуп саналат.

5. Татаал функциялар. Эгерде y өзгөрмөсү u өзгөрмөсүнөн көз каранды болсо, ал эми u өз кезегинде x аргументинен функция болсо, анда y өзгөрмөсү *функциядан функция* же *татаал функция* деп аталат.

Татаал функцияны $y=f(u)$, мында $u=\varphi(x)$ деп, же $y=f[\varphi(x)]$ деп белгилешет.

Мында y — татаал функция, u — арадагы аргумент, x — көз каранды эмес чоңдук, же жөнөкөй аргумент деп аталат.

Мисалдар. 1. $y=\sqrt{u}$, $u=\dfrac{1-x}{1+x}$ болсо, $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ татаал функциясына ээ болобуз.

2. $y=\sin u$, $u=1-x^3$ болсо, $y=\sin(1-x^3)$ татаал функция болот.

3. $y=x^3$, $y=2^x$, $y=\operatorname{ctg} x$ тер жөнөкөй функциялар.

6. Тескери функция жана анын графиги. $y=f(x)$ кандайдыр бир айкын функция болсун, мында y — функция, x — аргумент. Эгерде ушул функциялык көз карандылыкта x ти функция деп, y ти аргумент деп карасак, б. а. x ти y тен көз каранды кылып туюнтуп, x менен y тин ролдорун алмаштырсак, анда

$$y=\varphi(x) \tag{2}$$

функциясына ээ болобуз. Бул функция *$f(x)$ функциясы үчүн тескери* функция деп аталат.

Маселен, $y=\frac{x-1}{2}$ функциясы үчүн $y=2x+1$ тескери функция болот.

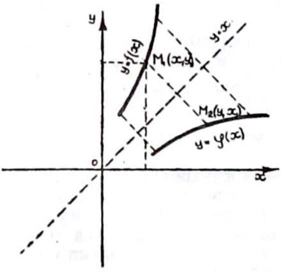
Эгерде $f(x)$ бир маанилүү функция болуп, монотондуу өсүүчү же монотондуу кемүүчү болсо, анда ага тескери функция дайыма бар болорун жана тескери функция дагы монотондуу өсүүчү же кемүүчү болорун далилдөөгө болот.

$y=f(x)$ жана $x=\varphi(y)$ функциялары тик бурчтуу координаталар системасында бир эле график менен туюнтуларын белгилей кетебиз. Булардын биринчисинде x аргументинин берилген мааниси боюнча y ти аныктайбыз, экинчисинде болсо тескерисинче y тин берилген мааниси боюнча x ти аныктайбыз.

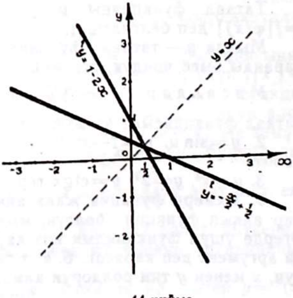
Эгерде биз, аргументти дайыма x менен, ал эми функцияны y менен белгилешти шартташып алсак, анда $y=f(x)$ ке тескери функция $y=\varphi(x)$ түрүндө жазылар эле. Мында биз x менен y тин ролдорун алмаштырдык.

Ал эми $y=f(x)$ тин графигинин кандайдыр бир $M_1(x_1, y_1)$ чекитинин x абсциссасы менен y ординатасынын орундарын алмаштырсак, анда биз $M_2(x_1, y_1)$ жаңы чекитине ээ болобуз. Мында x менен y тин орундары өз ара алмашылгандыктан $M_1(x_1, y_1)$ жана $M_2(x_1, y_1)$ чекиттери биринчи жана үчүнчү чейректердин биссектрисасына карата симметриялуу болот (43-чийме). Мындай симметриялуулук $y=f(x)$ тин графигиндеги бардык чекиттер үчүн сакталат. Ошондуктан $y=f(x)$ үчүн тескери функция болгон $y=\varphi(x)$ тин графигин түзүү үчүн $y=f(x)$ тин графигин биринчи жана үчүнчү координаталык бурчтардын биссектрисасына карата симметриялуу кылып чагылтуу жетиштүү болот (43-чийме).

Мисал. $y=1-2x$ функциясы үчүн тескери функцияны аныктап, графигин түзгүлө.



43-чийме



44-чийме

Бул функциялык көз карандылыктан x ти тапсак: $x = \frac{1-y}{2}$ болот. Андагы x менен y тин орундарын алмаштырып, $y = \frac{1-x}{2}$ тескери функциясына ээ болобуз. Мындагы эки функция тең түз сызыкты түюнткандыктан, экөөнү тең эле түздөн-түз түзө коёбуз. Мында биринчи түз сызыкты биринчи жана үчүнчү чейректердин биссектрисасына карата симметриялуу чагылтсак, экинчи түз сызык келип чыгары ачык көрүнүп турат (44-чийме).

7. Айкын эмес түрдө берилген функция. Биз жогоруда $y=f(x)$ ти айкын түрдө берилген функция деген элек. Чынында эле мында y ти табуу үчүн x тин үстүнөн кандай амал аткаруу керектиги айкын көрүнүп турат. Кээде функциялык көз карандылык y ке карата чыгарылбаган: $F(x, y)=0$ түрүндө берилет. Мындай учурда x аргументтүү y функциясын *айкын эмес түрдө берилди* деп аташат.

Мындай учурда $F(x, y)=0$ теңдемесин айрым учурда y ке карата чыгарууга болот, анда биз айкын түрүнө келебиз. Көпчүлүк учурда аны y ке карата чыгарууга болбойт.

Мисалдар. $y = x^3 - 1$, $y = \sin 5x$, $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ айкын функциялар. Ал эми $3x^2-y^2=0$, $6x+4y-9=0$, $xy\text{-}\arcsin\frac{y}{x} = 0$ теңдемелеринде y функциясы айкын эмес түрдө берилген.

8. Параметрдик түрдө берилген функция. Кээде y менен x тин функциялык көз карандылыгы

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{3}$$

түрүндө берилет, мында t параметр. Бул учурда функциялык көз карандылыкты *параметрдик түрдө берилди* деп аташат.

Эгер t параметрин жоюп, y ке карата чыгарууга мүмкүн болсо, анда $y=f(x)$ айкын теңдемесине келебиз. t параметрине каалагандай маанилер берип, x менен y ти аныктасак, алар биригип тегиздикте белгилүү бир чекитти аныктайт. Мына ушундай чекиттерди туташтырып чыксак, (3) функциялык көз карандылыктын графигине ээ болобуз.

Мисал. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ функциясы берилсин. Буларды $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$ түрүндө жазып, квадратка көтөрүп мүчөлөй кошсок: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсине ээ болобуз, анын графиги өзүңөргө белгилүү. Мындагы t параметрин жойбой эле, $t = 0$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, ... ж. б. маанилерин берип, аларга тиешелүү M_0, M_1, M_2, ... чекиттерди түзүп, аларды туташтырсак дале ошол эле эллипс келип чыгат.

§ 5. Жөнөкөй элементардык функциялар жана алардын графиктери

1. Алгебралык функциялар

а) Д а р а ж а л у у ф у н к ц и я деп $y=x^n$ түрүндөгү функцияны айтышат (мында x—аргумент, n—турактуу сан).

б) Ушул сыяктуу даражалуу функциялардан түзүлгөн:

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

функциясын, *бүтүн рационалдык* функция дешет (мында $a_0, a_1, \dots, a_n$ турактуу сандар, n—бүтүн оң сан).

в) (1) сыяктуу бүтүн рационалдык эки функциянын катышы бөлчөктүү рационалдык функция деп аталат:

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_{m-1}x+b_m}. \qquad (2)$$

Бөлчөктүү рационалдык функция, бөлчөктүн бөлүмүн нөлгө айландырбаган x тин бардык маанилеринде аныкталган болот. $n=m=1$ болгон учурдагы бөлчөктүү рационалдык функция бөлчөктүү-сызыктуу рационалдык функция деп аталат жана ал

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (2a)$$

түрүндө берилет.

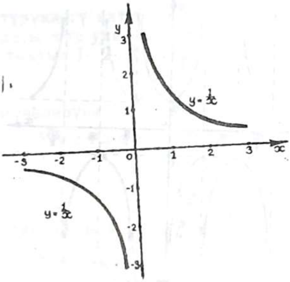
М и с а л д а р. 1. $y=x^n$ даражалуу функциясынын касиети n дин маанисине жараша болот.

Мында n так болсо, $y=x^n$ функциясы да так, n жуп болсо, жуп функция болот. Аныкталуу областтары да n ге жараша түрдүүчө болот.

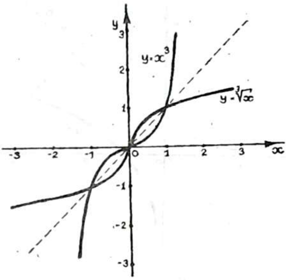
Алсак $n=1$ болсо, сызыктуу функцияга, $n=2$ болсо, квадраттык функцияга (параболага) ээ болобуз. (1) нин айрым учуру болгон $y=ax^2+bx+c$ квадраттык үч мүчө кандайдыр бир параболаны туюнтарын билесиңер.

$n=-1$ болсо, $y=\frac{1}{x}$ функциясына ээ болобуз. Муну бөлчөктүү рационалдык функциянын жөнөкөй учурларынын бири деп кароого болот. Мындай көз карандылыкты *тескери пропорциялаштык* деп аташат; эгер x чоңойсо, y кичиреет, x кичирейсе, y чоңоёт. $x=0$ чекитинде функция аныкталган эмес, анткени $\frac{1}{x}$ бөлчөгү маанисин жоготот. Бул кемүүчү жана так функция, ошондуктан графиги координаталар башталмасына карата симметриялуу болот (45-чийме).

2. $y=\sqrt[n]{x}$ функциясы. Муну n-даражалуу тамыр дешет, мында n натуралдык сан. Эгер n жуп болсо, бул функциянын аныкталуу областы $0\leqslant x<+\infty$ жарым сегменти болот, n так болсо, $-\infty<x<+\infty$ бүткүл сандык ок болот. Бул функция $y=x^n$ ге (б. а. $x=y^n$ ге) тескери функция болгондуктан, $y=\sqrt[n]{x}$ радикалынын графигин түзүү үчүн $y=x^n$ түз функциясынын графигин 1-жана 3-



45-чийме



46-чийме

чейректердин биссектрисасына симметриялуу кылып чагылтуу жетиштүү болот.

46-чиймеде $y=x^3$ жана $y=\sqrt[3]{x}$ функцияларынын графиктери берилген. Радикалдарды туткан функциялар *иррационалдык* деп аталат.

Берилишинде x аргументине карата алгебралык амалдар (кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүү, даражага көтөрүү, тамырдан чыгаруу) жүргүзүлө турган функциялар *алгебралык* функциялар деп аталат.

Биз карап өткөн: даражалуу, бүтүн жана бөлчөктүү рационалдык жана иррационалдык функциялардын ар бири, алардын ар кандай комбинациялары алгебралык функциялар болушат.

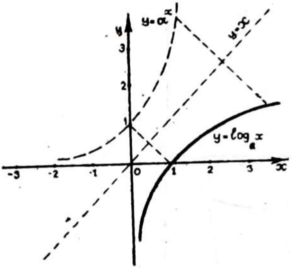
2. Трансценденттик функциялар

Алгебралык эмес, калган функциялардын бардыгы трансценденттик функциялар деп аталат.

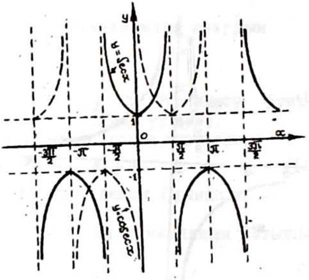
Алсак, α иррационалдык сан болгондо, $y=x^{\alpha}$ функциясы, көрсөткүчтүү, логарифмдик, тригонометриялык жана тескери тригонометриялык функциялар трансценденттик функциялар болот.

а) $y=a^x$ *көрсөткүчтүү* функция менен мектептен жакшы таанышсыңар (мында $a>0$, $a\neq 1$). Ал, бүткүл $]-\infty, +\infty[$ сандык окто аныкталган функция болот . Көрсөткүчтүү функциянын бардыгы $A(0, 1)$ чекити аркылуу өтүп, дайыма $a^x>0$ болот. $a>1$ болсо, монотондуу өсүүчү, $0<a<1$ болсо, монотондуу кемүүчү болот да, көрсөткүчтүү функциянын графиги дайыма OX огунун жогору жагында жатат. Демек, ал төмөн жагынан чектелген функция болот.

б) *Логарифмдик функция* деп, $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) функциясын айтышат. Бул функция $y=a^x$ көрсөткүчтүү функциясына тескери функция болуп саналат. Бардык логарифмдик функциялар $B(1, 0)$ чекити аркылуу өтөт. Көрсөткүчтүү функция сыяктуу эле $a>1$ кезинде логарифмдик функция өсүүчү болуп, $0<a<1$ кезин-



47-чийме



48-чийме

де кемүүчү болот. Анык сандардын көптүгүндө $x>0$ оң сандардын гана логарифми болгондуктан, логарифмдик функция $]0, +\infty[$ интервалында гана аныкталат. Логарифмдик функциянын графигин түзүү үчүн көрсөткүчтүү функциянын графигин 1- жана 3-чейректин биссектрисасына карата симметриялуу кылып чагылтуу жетиштүү болот (47-чийме).

в) *Тригонометриялык функциялар* деп, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$, $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec}x$ функцияларын айтарыбыз белгилүү. Орто мектептен силер булардын бардыгы мезгилдүү экендигин билесиңер. Алардын ичинен биринчи экөөнүн жана акыркы экөөнүн мезгили 2π, ортоңку экөөнүн мезгили π экенин да билесиңер. Биринчи төртөөнүн графиктери жакшы белгилүү болгондуктан, акыркы экөөнүн гана графиктерин келтиребиз. 48-чиймеде туташ сызыктар менен $y=\sec x$ функциясынын графиги, штрих сызыктар менен $y=\operatorname{cosec}x$ тин графиги көрсөтүлгөн. $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$ болушкандыктан, $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ жана $y=\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\sin x}$ функцияларынын графиктери $y=\pm 1$ түз сызыктары менен түзүлгөн тилкенин сыртында жатат.

VII ГЛАВА

ФУНКЦИЯНЫН ПРЕДЕЛИ ЖАНА ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮГҮ

§ 1. Сандык удаалаштык жана анын предели

Эгерде ар бир натуралдык n санына кандайдыр бир эреже боюнча x_n саны туура келсе, анда $\{x_n\}$ сандык удаалаштык берилди деп, аны:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

түрүндө жазышат. Удаалаштыктын x_n жалпы мүчөсү $x_n=f(n)$

түрүндөгү натуралдык аргументтүү функция болуп саналат. Мындагы n ге удаасы менен $n=1, 2, 3, \ldots$ маанилерин берип, удаалаштыктын 1-, 2-, 3-, ...ж. б.

$$x_1=f(1),\ x_2=f(2),\ x_3=f(3), \ldots$$

мүчөлөрүнө ээ болобуз.

Мисалдар. 1. Эгер $\left\{x_n\right\}=\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ болсо, анда

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots \tag{2}$$

удаалаштыгы келип чыгат.

2. Ал эми $\left\{x_n\right\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ болсо,

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ , \ldots,\ \frac{1}{n}, \ldots \tag{3}$$

удаалаштыгын жаза алабыз.

3. Эгер $\left\{x_n\right\}=\frac{1+(-1)^n}{n}$ болсо, анда

$$0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3}, \ldots,\ \frac{1+(-1)^n}{n}$$

удаалаштыгы түзүлөт.

Удаалаштыктын мүчөлөрүн сан катары сандык окко түшүрүп, анын геометриялык сүрөттөлүшүнө ээ болобуз. 49-жана 50-чиймелерде ирети менен (2) жана (3) удаалаштыктардын геометриялык сүрөттөлүштөрү берилген.

Эгер бардык n үчүн: $|x_n|<M$ орундала турган $M>0$ чектүү саны табылса, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгы *чектелген* деп аталат. Эгер мындай чектүү M табылбаса, анда $\{x_n\}$ *чектелбеген* удаалаштык деп аталат.

Геометриялык жактан талкуулаганда чектелген удаалаштыктын бардык мүчөлөрү $]-M, M[$ интервалында жатат.

Чектелбеген удаалаштыктын, M канчалык чоң болсо да интервалынын сыртында жата турган мүчөлөрү бар болот.

Эгер бардык n үчүн $x_n<M$ орундалса, анда удаалаштык *жогору жагынан чектелген* деп, ал эми $m<x_n$ орундалса, анда *төмөн жагынан чектелген* деп аталат. Жогору жагынан чектелген удаалаштыктын мүчөлөрү $(-\infty, M)$ интервалында, төмөн жагынан чектелгениники $(m, +\infty)$ интервалында жатат.

Алсак, жогоруда келтирилген үч удаалаштык тең чектелген, анткени алардын мүчөлөрү нөлдөн кичине, бирден чоң боло албайт.

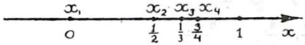
Ал эми, $\{x_n\}=\{2^n\}$, б. а. $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ удаалаштыгы төмөн жагынан чектелген, ал эми $\{x_n\}=\{-n\}$, б. а. $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ удаалаштыгы жогору жагынан чектелген болот.

Аныктама. *Эгер мурунтадан берилген* $\varepsilon>0$ *саны канчалык* *кичине болсо да ε дон көз каранды болгон N саны табылып, бардык $n>N$ үчүн*

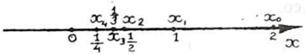
$$|x_n-a|<\varepsilon \qquad (5)$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда a саны $\{x_n\}$ удаалаштыгынын предели деп аталат.

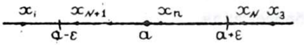
a саны $\{x_n\}$ удаалаштыгынын предели дегенди:



49-чийме



50-чийме



51-чийме

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \text{ же } x_n\to a,\ n\to\infty \quad (6)$$

деп белгилешет (мында *lim* латынча *«limes»* — «предел» деген сөздүн кыскача жазылышы).

5) барабарсыздык $-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$ же $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ барабарсыздыгына эквиваленттүү. Демек, геометриялык жактан $\{x_n\}$ удаалаштыгынын биринчи N ден башка, калган бардык мүчөлөрү $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ интервалында жатса гана a саны ал удаалаштыктын предели болот. Мындагы $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ интервалы a чекитинин «ε — аймагы» деп аталат (51-чийме).

Мисал. Жалпы мүчөсү аркылуу берилген $x_n=\frac{n+1}{n}$ удаалаштыгынын предели $a=1$ саны боло тургандыгын көрсөткүлө.

Ал үчүн канчалык кичине болсо да, каалагандай $\varepsilon>0$ саны үчүн аныктама боюнча $|x_n-a|=|x_n-1|<\varepsilon$ боло турган шартты текшерип көрөлү $|x_n-1|=\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$ болот.

Демек, нөлдөн чоң болгон каалаган ε саны канчалык кичине болсо да, удаалаштыктын бардык $n>N$ мүчөлөрү үчүн $\frac{1}{n}<\varepsilon$ боло тургандай N номерин табуу керек.

$\frac{1}{n}<\varepsilon$ барабарсыздыгынан $n>\frac{1}{\varepsilon}$ келип чыгат. Демек, изделген N номер үчүн $\frac{1}{\varepsilon}$ санын алуу жетиштүү болот.

Мисалы, эгерде $\varepsilon=0{,}1$ десек, анда $N=\frac{1}{0{,}1}=10$ болот, же $\varepsilon=0{,}01$ десек, $N=\frac{1}{0{,}01}=100$ болот.

Ушул сыяктуу, каалаган $\varepsilon>0$ үчүн туура келген N номерин (чектелген санды) көрсөтө алабыз. Демек, $\varepsilon=0{,}1$ деп алган учурда $N=10$ болгондуктан, берилген удаалаштыктын $n=11$ чи мүчөсүнөн тартып калган бардык мүчөлөрү ε аймагында, б. а. (1—0,1;

$1+0{,}1)$ интервалында жайланышат. $\varepsilon=0{,}01$ болгондо $N=100$ болгондуктан удаалаштыктын $n=101$ чи мүчөсүнөн тартып, калган бардык мүчөлөрү ε аймагында, б. а. $(1-0{,}01;\ 1+0{,}01)$ интервалында жайланышкан болот. Бул факт берилген удаалаштыктын предели $a=1$ болот дегендикти билдирет. Ошентип, кандай гана $\varepsilon>0$ албайлы берилген удаалаштыктын предели бирөө гана болот.

§ 2. Чексиз кичирейүүчү жана чексиз чоңоюучу чоңдуктар жана алардын касиеттери

Аныктама. *Эгерде x_n өзгөрмө чоңдугунун предели нөл болсо, б. а. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ болсо, анда x_n чексиз кичирейүүчү чоңдук деп аталат.*

Демек, пределдин аныктамасы боюнча $\varepsilon>0$ саны канчалык кичине болсо да, бардык $n\geqslant N$ үчүн $|x_n-0|=|x_n|<\varepsilon$ орундала турган N саны табылат.

Ошентип, x_n өзгөрмөсүнүн абсолюттук чоңдугу кандайдыр бир N номерден баштап, мурдатан берилген эң кичине ε дон кичине боло алса жана кичине бойдон кала берсе гана чексиз кичирейүүчү чоңдук болот.

Мисалдар. 1. $x_n=\frac{1}{n}$ өзгөрмө чоңдугу чексиз кичирейүүчү чоңдук, анткени анын предели нөл экендиги белгилүү.

2. $x_n=\{q^n\}$ $(|q|<1)$ удаалаштыгы чексиз кичирейүүчү болот, анткени $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ болот. Чынында эле n чоңойгондо бирден кичине сандын n-даражасы нөлгө умтулат.

Аныктама. *Эгерде M канчалык чоң болсо дагы x_n өзгөрмө чоңдугу үчүн: $|x_n|>M$ барабарсыздыгы орундала тургандай $n>N$ номери бар болсо, анда x_n чексиз чоңоюучу чоңдук деп аталат.* Геометриялык жактан алганда M канчалык чоң болсо дагы $(-M, M)$ интервалынын ичинде $\{x_n\}$ удаалаштыгынын чектүү гана мүчөлөрү жатат, калган чексиз көп мүчөлөрү ал интервалдын сыртында жатат.

Алсак, $\{x_n\}=\{n\}$, $\{-2n\}$, $\{2^n\}$, $\left\{(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ удаалаштыктары чексиз чоңоюучу чоңдуктар болушат.

$\{x_n\}$ чексиз чоңоюучу чоңдук дегенди $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ деп жазышат.

1-теорема. *Эгерде α_n чексиз кичирейүүчү болсо, анда $\beta_n=\frac{1}{\alpha_n}$ чексиз чоңоюучу болот жана тескерисинче β_n чексиз чоңоюучу болсо, анда $\alpha_n=\frac{1}{\beta_n}$ чексиз кичирейүүчү болот.*

Далилдөө. α_n ч.к.ч. болгондуктан $M>0$ саны канчалык чоң болсо да $|\alpha_n|<\frac{1}{M}$ боло турган $n>N$ номери табылат. Анда ошол эле N номери үчүн $|\beta_n|=\left|\frac{1}{\alpha_n}\right|>M$ орундалат, б. а. $\beta_n\to+\infty$, демек, ал чексиз чоңоюучу чоңдук.

Эми β_n ч.ч.ч. болсун, анда аныктама боюнча $\varepsilon>0$ саны канчалык кичине болсо да, $|\beta_n|>\frac{1}{\varepsilon}$ орундала турган $n>N$ номери табылат, демек ошол эле номер үчүн

$$|\alpha_n|=\left|\frac{1}{\beta_n}\right|<\varepsilon \text{ болуп, } \frac{1}{\beta_n} \text{ ч. к. ч. болот.}$$

Мисалдар. 1) $\alpha_n=\frac{1}{2^n}$ ч. к. ч., ал эми $\beta_n=\frac{1}{\alpha_n}=2^n$ ч. ч. ч.

2. $\beta_n=n^2$ ч. ч. ч. экени ачык, демек $\alpha_n=\frac{1}{\beta_n}=\frac{1}{n^2}$ ч.к.ч. болот.

2-теорема. Чектүү сандагы чексиз кичирейүүчү чоңдуктардын алгебралык суммасы чексиз кичирейүүчү болот.

Далилдөө. α_n, β_n, γ_n чексиз кичирейүүчүлөр болсун. Анда $\varepsilon>0$ канчалык кичине болсо да, $n>N_1$ үчүн $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{3}$ жана $n>N_2$ үчүн $|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{3}$, ал эми $n>N_3$ үчүн $|\gamma_n|<\frac{\varepsilon}{3}$ орундала турган N_1, N_2, N_3 номерлери табылат. Эгер $N=\max\{N_1, N_2, N_3\}$ десек, анда $n>N$ үчүн бул үч барабарсыздык бир мезгилде аткарылат. Демек, анда $\alpha_n+\beta_n-\gamma_n$ алгебралык суммасы үчүн

$$|\alpha_n+\beta_n-\gamma_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|+|\gamma_n|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

аткарылат. Теорема үч кошулуучу үчүн далилденди. Чектүү сандагы кошулуучулар үчүн дале ушул сыяктуу эле далилденет.

Эскертүү: Кошулуучулардын саны чектүү болбогон алгебралык сумма үчүн бул теорема орундалбай калышы ыктымал. Мисалга:

$y_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}$ (n кошулуучу) суммасын алсак, $n\to\infty$ дагы анын предели $\frac{1}{n}\cdot n=1$ге барабар болуп, чексиз кичирейүүчү чоңдук болбойт.

3-теорема. Чексиз кичирейүүчү чоңдук менен чектүү сандын көбөйтүндүсү чексиз кичирейүүчү чоңдук болот.

Далилдөө. α_n чексиз кичирейүүчү болуп, K кандайдыр чектүү сан болсун. Аныктама боюнча $\varepsilon>0$ каалагандай кичине сан болгондо $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{|K|}$ орундала турган $n>N$ номери табылат. Демек, $|\alpha_n\cdot K|=|\alpha_n|\cdot|K|<\varepsilon$ аткарылат, б. а. $\alpha_n\cdot K$ чексиз кичирейүүчү чоңдук болот.

4-теорема. Эгер x_n өзгөрүлмө чоңдугу a пределине ээ болуп, ал эми α_n чексиз кичирейүүчү чоңдук болсо, анда

$$x_n=a+\alpha_n \tag{1}$$

барабардык орундалат.

Тескерисинче, эгер, α_n чексиз кичирейүүчү болуп, x_n өзгөрмө чоңдугу (1) түрүндө туюнтулса, анда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{2}$$

болот, б. а. (1) жана (2) барабардыктар эквиваленттүү.

Далилдөө. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ болсун, анда аныктама боюнча $\varepsilon > 0$ канчалык кичине болсо да, бардык $n > N$ үчүн $|x_n - a| < \varepsilon$ орундалуучу N номери табылат. Демек, $x_n - a$ чексиз кичирейүүчү чоңдук. Аны α_n аркылуу белгилейбиз: $x_n - a = \alpha_n$. Мындан $x_n = a + \alpha_n$ болуп (1) барабардык далилденет.

Эми тескерисинче a_n чексиз кичирейүүчү болуп, (1) барабардык орундалсын, анда $x_n - a = a_n$. Мында a_n ч. к. ч. болгондуктан каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн $|\alpha_n| < \varepsilon$, б. а. $|x_n - a| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат. Демек, аныктама боюнча $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ Ушуну менен теорема толук далилденди.

§ 3. Пределдер жөнүндө негизги теоремалар

1-теорема. *Пределдерге ээ болуучу чектүү сандагы өзгөрмө чоңдуктардын алгебралык суммасынын предели алардын пределдеринин алгебралык суммасына барабар.*

Далилдөө. Пределге ээ боло турган чектүү сандагы x_n, y_n, ..., z_n өзгөрмө чоңдуктарын алабыз. Алар:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,\ \dots,\ \lim_{n\to\infty} z_n = c \tag{3}$$

пределдерине ээ болсун. Аларды (1) боюнча:

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,\ \dots,\ z_n = c + \gamma_n \tag{4}$$

түрүндө жазууга болот, мында α_n, β_n, γ_n чексиз кичирейүүчү чоңдуктар.

Эми:

$$x_n + y_n + \dots - z_n = (a + b + \dots - c) + (\alpha_n + \beta_n + \dots - \gamma_n) \tag{5}$$

алгебралык суммасын түзөбүз, мында § 2, 2-теорема боюнча $(\alpha_n + \beta_n + \dots - \gamma_n)$ ч. к. ч. § 2 тагы 4-теорема боюнча:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n + \dots - z_n) = a + b + \dots - c.$$

Мындагы a, b, ..., c лардын ордуна алардын (3) дөгү маанилерин коюп чыксак:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n + \dots - z_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n + \dots - \lim_{n\to\infty} z_n \tag{6}$$

келип чыгып, теорема далилденет.

2-теорема. *Пределдерге ээ болуучу чектүү сандагы өзгөрмө чоңдуктардын көбөйтүндүсүнүн предели көбөйтүүчүлөрдүн пределдеринин көбөйтүндүсүнө барабар.*

Далилдөө. Адегенде эки көбөйтүүчү үчүн далилдейбиз. α_n жана y_n өзгөрмө чоңдуктары:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \tag{3'}$$

6—29

пределдерине ээ болсун,. анда аларды (α_n, β_n—ч. к. ч.):

$$x_n=a+\alpha_n,\ y_n=b+\beta_n \tag{4'}$$

түрүндө жаза алабыз. Аларды өз ара көбөйтүп:

$$x_n\cdot y_n=ab+(\alpha_n b+a\cdot\beta_n+\alpha_n\cdot\beta_n) \tag{7}$$

экендигин аныктайбыз. § 2 тагы 3-жана 2-теоремалар боюнча мындагы $(\alpha_n\cdot b+a\cdot\beta_n+\alpha_n\cdot\beta_n)$ суммасы чексиз кичирейүүчү чоңдук, демек андагы 4-теорема боюнча

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b \text{ же } \lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n \tag{8}$$

болуп, теорема эки көбөйтүүчү үчүн далилденет.

(8) боюнча үч, төрт, ..., чектүү сандагы көбөйтүүчүлөр үчүн теорема оңой эле далилденет. Чынында эле:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n\cdot z_n)=\lim_{n\to\infty}[(x_n y_n)\cdot z_n]=\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)\cdot\lim_{n\to\infty}z_n.$$

Ал эми (8) боюнча $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim y_n$. Ошондуктан:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n\cdot z_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n\cdot\lim_{n\to\infty}z_n$$

экендигине ээ болобуз.

1-натыйжа. *Турактуу санды пределдин белгисинин сыртына чыгарууга болот.*

Чынында эле:

$$\lim_{n\to\infty}(A\cdot x_n)=\lim_{n\to\infty}A\cdot\lim_{n\to\infty}x_n=A\cdot\lim_{n\to\infty}x_n, \tag{9}$$

анткени турактуу сандын предели өзүнө барабар.

2-натыйжа. *Эгер x өзгөрмө чоңдугу пределге ээ болсо, анда анын даражасынын предели анын пределинин ошол эле даражасына барабар.*

Чынында эле $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ ирет}}$ болгондуктан, 2-теорема боюнча:

$$\lim_{n\to a}(x^n)=\underbrace{\lim_{n\to a}x\cdot\lim_{n\to a}x\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to a}x}_{n\text{ ирет}}=(\lim_{n\to a}x)^n \tag{10}$$

экендигине ынанабыз.

3-натыйжа. *Пределге ээ болуучу x өзгөрмө чоңдугу үчүн:*

$$\lim\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}x} \tag{11}$$

барабардыгы аткарылат, б. а. пределди радикалдын ичине киргизүүгө болот.

Чынында эле, $z=\sqrt[n]{x}$ деп белгилесек, $z^n=x$ болору белгилүү. (10) боюнча: $(\lim\limits_{n\to a}z)^n=\lim x$ болот, мындан $\lim\limits_{n\to a}z=\sqrt[n]{\lim\limits_{n\to a}x}$. Ал эми z тин ордуна анын $\sqrt[n]{x}$ маанисин койсок, (11) келип чыгат.

3-теорема. *Эгер бөлүнүүчү жана бөлүүчү пределге ээ болсо жана бөлүүчүнүн предели нөлдөн айырмалуу болсо, анда бөлчөк-*

түн пределi алымынын пределин бөлүмүнүн пределине бөлгөнгө барабар.

Д а л и л д ө ө. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $b \neq 0$ болсун. Алар, α_n жана β_n чексиз кичирейүүчү болгондо (4′) ке эквиваленттүү. Алардын катышы

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} \tag{12}$$

болору белгилүү. (12) нин эки жагынан тең $\frac{a}{b}$ ны кемитебиз:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} \text{ же } \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b(b+\beta_n)}. \tag{13}$$

Акыркы бөлчөктүн алымындагы айырма чексиз кичирейүүчү чоңдук (§ 2, 2-, 3-теоремалар). Шарт боюнча $b \neq 0$. Демек, $\frac{1}{b\cdot(b+\beta_n)}\cdot(\alpha_n b - \beta_n a)$ дагы чексиз кичирейүүчү чоңдук. Ошондуктан (13) дө пределге өтсөк:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0 \text{ же } \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

келип чыгат. a жана b нын маанилерин койсок:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \tag{14}$$

болуп, теорема далилденет.

4-теорема. *Эгер x_n жана z_n өзгөрмө чоңдуктары жалпы пределге ээ болушса жана $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ барабарсыздыгы орундалса, анда y_n өзгөрмө чоңдугу дагы ошол эле пределге ээ болот.*

Д а л и л д ө ө. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ болсун. Эгер $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ барабарсыздыгынын бардык мүчөлөрүнөн a ны кемитсек, анда

$$x_n - a \leqslant y_n - a \leqslant z_n - a$$

барабарсыздыгына ээ болобуз.

Мындан, $y_n - a$ айырмасы $x_n - a$ жана $z_n - a$ чексиз кичирейүүчү чоңдуктардын арасына камалып тургандыгын көрүп турабыз. Демек, $y_n - a$ дагы чексиз кичирейүүчү чоңдук, б. а. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Теорема далилденди.

Аныктама. *Эгер $\{x_n\}$ удаалаштыгынын мүчөлөрү үчүн:*

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots \tag{15}$$

барабарсыздыктары орундалса, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгы ***м о н о т о н д у у ө с ү ү ч ү*** деп аталат.

Эгер

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots \tag{16}$$

барабарсыздыктары орундалса, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгы ***м о н о т о н д у у к е м ү ү ч ү*** деп аталат.

Эгер (15) де барабардык белги да бар болсо, анда $\{x_n\}$ *кемибөөчү* удаалаштык деп, эгер (16) да барабардык белги да бар болсо, анда $\{x_n\}$ *өспөөчү* удаалаштык деп аталат.

5-теорема. *Эгер монотондуу өсүүчү $\{x_n\}$ удаалаштыгы жогору жагынан чектелген болсо, анда ал чектүү пределге ээ болот, эгер ал жогору жагынан чектелбесе, анда $+\infty$ ге умтулат.*

Д а л и л д ө ө. 1) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$ (15′) аткарылып, калгандай n үчүн $x_n < M$ болсун. Ар кандай n үчүн $x_n \leqslant N$ орундала турган, мүмкүн болгон бардык N дерди карап көрөлү. M дин өзү жана андан чоң сандар дагы ушундай N дердин ичине кирет. Эгерде N_1 жана N_2 сандары $x_n \leqslant N$ барабарсыздыгын канааттандыруучу каалагандай эки сан болсо, анда алардын арасында жатуучу сандардын бардыгы ушул барабарсыздыкты канааттандырат. Демек, бул сыяктуу N сандарынын көптүгү кандайдыр бир туюк же ачык интервалды түзөт. Анын сол жакки учун a аркылуу белгилесек, ар кандай n үчүн

$$x_n \leqslant a \tag{16′}$$

барабарсыздыгы аткарылат.

Ал эми каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн

$$x_n > a - \varepsilon \tag{17}$$

боло турган N номери табылат, анткени $a - \varepsilon$ саны жогоруда аталган интервалга таандык эмес. (15′) жана (17) ден

$$a - \varepsilon < x_{N+1},\ a - \varepsilon < x_{N+2}, \ldots$$

орундалат, б. а.бардык $n \geqslant N$ үчүн

$$a - \varepsilon < x_n \tag{18}$$

барабарсыздыгы аткарылат..

(16) жана (18) ден, бардык $n > N$ үчүн

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

барабарсыздыгы келип чыгат. Демек

$$\lim x_n = a$$

болуп, теореманын биринчи бөлүгү далилденет.

2) Эгер монотондуу өсүүчү $\{x_n\}$ удаалаштыгы жогору жагынан чектелбесе, анда M саны канчалык чоң болсо дагы $x_N > M$ боло турган x_N мүчөсү табылат. (15′) боюнча, бардык $n > N$ үчүн дагы $x_n > M$ аткарылат, демек $\lim x_n = +\infty$.

6-теорема. *Эгер монотондуу кемүүчү $\{x_n\}$ удаалаштыгы төмөн жагынан чектелсе, анда ал чектүү пределге ээ болот, эгер ал төмөн жагынан чектелбесе, анда $-\infty$ ге умтулат.*

Бул дале 5-теорема сыяктуу далилденет.

§ 4. Биринчи сонун предел.

Пределдер теориясынын практикасында биринчи сонун предел деп аталуучу

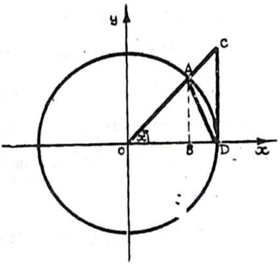
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{1}$$

пределн кеңири колдонулат. Муну далилдөө үчүн R радиустуу айлана алып, x борбордук бурчун түзөбүз. Ал бурч $0<x<\frac{\pi}{2}$ болгон тар бурч болсун (52-чийме). AD хордасын жүргүзүп, D чекитинде айланага жаныма жүргүзүп, OA радиусунун уландысы менен кесилишкен чекитин, C аркылуу белгилейбиз. Эми

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x \tag{2}$$

барабарсыздыгы орундаларын көрсөтөбүз. Ан үчүн OAD үч бурчтугунун, OAD секторунун, OCD үч бурчтугунун аянттарын салыштырабыз. Мында

$$\triangle OAD_{\text{аян}}<\text{сект.}\ OAD_{\text{аян}}<\triangle OCD_{\text{аян}}. \tag{3}$$



52-чийме

экендиги чиймеден ачык көрүнүп турат. Демек,

$$\frac{1}{2}OD\cdot AB<\frac{1}{2}OD\cdot\breve{AD}<\frac{1}{2}OD\cdot CD \tag{4}$$

аткарылат. Мындан, $AB=R\sin x$, $\breve{AD}=Rx$, $CD=R\operatorname{tg}x$ экендигин эске алып, (4) гө койгондон кийин, $\frac{R^2}{2}$ ге кыскартсак, (2) барабарсыздык келип чыгат.

Биринчи чейректе $\sin x>0$ болгондуктан, (2) нин бардык мүчөлөрүн $\sin x$ ке бөлсөк

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\ \text{же}\ 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x \tag{5}$$

барабарсыздыгына ээ болобуз.

$x\to 0$ кезде, (5) кош барабарсыздыктын четки эки мүчөсү 1 ге умтулат, ошондуктан 4-теорема боюнча анын ортоңку мүчөсү дагы 1 ге барабар болгон пределге ээ болот да, (1) формула далилденет.

Э с к е р т ү ү. Эгер $x\to 0$ да, $z=t(x)$ туюнтмасы дагы нөлгө умтулса, анда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$ болот.

Мисалдар. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$ пределин аныктагыла.

Бул пределди табуу үчүн бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн 4 кө көбөйтөбүз, анда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}$$

келип чыгат. Эгер $z=4x$ деп белгилесек, $x\longrightarrow 0$ да $z\longrightarrow 0$ дөн $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$ болуп, акырында $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4$ экендигине ээ болобуз.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ пределин эсептегиле.

Тригонометрия курсунан $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ формуласын жакшы билебиз, демек $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ болот. Ошентип,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2$$

пределине ээ болобуз.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$ пределин эсептегиле.

$z=\operatorname{arctg}x$ болсун дейли, анда $x\to 0$ да $z\to 0$ жана $x=\operatorname{tg}z$ болот. Ошондуктан,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{tg}z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\frac{\sin z}{\cos z}}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{\frac{\sin z}{z}}=\frac{\lim\limits_{z\to 0}\cos z}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}}=1.$$

§ 5. Экинчи сонун предел

Пределдер теориясында, экинчи сонун предел деп атала турган

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \tag{6}$$

предели дагы практикада көп колдонулат.

Эми мына ушул (6) пределдин бар экендигин далилдейбиз.

Ньютондун биномунун:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{k!}\times$$
$$\times a^{n-k}b^k+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2}+na\cdot b^{n-1}+b^n$$

формуласы боюнча, $a=1$, $b=\frac{1}{n}$ десек:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times$$
$$\times\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

экендигине ээ болобуз. Аны төмөнкүчө жөнөкөйлөтөбүз:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \tag{7}$$

Мындагы үчүнчүдөн баштап бардык оң мүчөлөрдү калтырып койсок, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$ болору ачык.

Эми $\{x_n\}$ удаалаштыгы монотондуу өсүүчү экендигин жана жогору жагынан чектелгендигин көрсөтөбүз. Эгер n чоңойсо, анда биринчиден (7) нин оң жагындагы оң кошулуучулардын саны арбыйт, экинчиден ар бир кошулуучу чоңоёт, анткени n чоңойсо ар бир көбөйүүчү $\left(1+\frac{к}{n}\right)$, демек кошулуучусу да чоңоёт, Ошондуктан $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ удаалаштыгы өсүүчү удаалаштык болот.

Ал $\{x_n\}$ удаалаштыгы өсүүчү болгону менен жогору жагынан чектелгендигин көрсөтөбүз. Чынында эле (7) нин оң жагындагы кашаадагы туюнтмалардын бардыгы 1 ден кичине экендиги ачык. Ошондуктан алардын бардыгын 1 менен алмаштырсак, (7) нин оң жагы чоңоёт да,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \tag{8}$$

экендигине ээ болобуз. Эгер (8) барабарсыздыктын үчүнчү мүчөсүнөн баштап бөлүмүндөгү $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ көбөйтүндүсүндө 3 төн баштап, аларды 2 менен алмаштырсак, ар бир бөлчөктүн бөлүмү кичиреет, демек бөлчөк өзү чоңоёт. Мында күчөтүлгөн:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \tag{9}$$

барабарсыздыгы келип чыгат. Мында $n\to\infty$ да, экинчиден башталган сумма биринчи мүчөсү $a=1$, бөлүмү $q = \frac{1}{2}$ болгон чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия болгондуктан, анын суммасы $S = \frac{1}{1-q} = 2$ болуп, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ барабарсыздыгы орундаларына ынанабыз.

Ошентип, $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ удаалаштыгы монотондуу өсүүчү жана жогору жагынан чектелген болгондуктан 5-теорема боюнча ал чектүү пределге ээ болот. Ал пределди e аркылуу белгилеп:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

барабардыгына ээ болобуз. Жогоруда $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ экендиги көрсөтүлгөн. Ошентип, e саны 2 менен 3 түн арасында жатуучу: $2<e<3$ туруктуу сан болот.

e ни Непердин саны деп аташат. (9) формулада кошулуучулардын саны канчалык көп алынса, e үчүн ошончолук так маани табылат.

e нин жакындаштырылган мааниси: $e=2{,}718281828459045...$, болот. e нин иррационалдык сан экендигин далилдөөгө болот.

Эгер $n=\frac{1}{\alpha}$ болсун десек, анда $\alpha=\frac{1}{n}$ болуп, $n\to\infty$ да $\alpha\to 0$ белгилүү, анда (6) нын ордуна

$$e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{10}$$

барабардыгына ээ болобуз.

Мисалдар. 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$ пределин тапкыла. Мындагы туюнтма (6) дагы туюнтмага окшош эмес, бирок ага келтирүүгө болот. $n=2t$ десек, $t=\frac{n}{2}$ болгондуктан $n\to\infty$ да $t\to\infty$; $3n=6t$ болот. Ошентип,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{6t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^6=e^6.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ пределин аныктагыла.

Мында $2x=\alpha$ десек, $x\to 0$ да $\alpha\to 0$; $\frac{1}{x}=\frac{2}{\alpha}$ болот. Демек,

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^2=e^2.$$

Пределдерге көнүгүүлөр.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$ пределин тапкыла.

Бөлчөктүн предели боюнча алымында жана бөлүмүндө дароо пределге өтсөк $\frac{0}{0}$ болуп, аныксыздыкка келебиз. $x=2$ де бөлүмү нөлгө айлангандыктан, ал сөзсүз $x-2$ ге бөлүнөт. Ошондуктан аны көбөйтүүчүлөргө ажыратуу керек, анда

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=1$$

предели табылат.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}=\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\pi}=\dfrac{1+1}{1+1}=1.$

4. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{1}{6}.$

5. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\dfrac{1}{4+2\cdot 2+4}=\dfrac{1}{12}.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-1}{2x^2+x+4}=\dfrac{5\cdot 0-1}{2\cdot 0+0+4}=-\dfrac{1}{4}.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0$ (бөлчөктү x^2 ка бөлдүк).

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}}-6}{3+\frac{1}{x}}=-2$ (бөлчөктү x ке бөлдүк).

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}=$

$=-\dfrac{3}{3}=-1$

10. $\lim\limits_{x\to\pi+0}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi+0}\dfrac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi+0}\times$

$\times\dfrac{\sqrt{2}\cdot\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\lim\limits_{x\to\pi+0}\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x\cdot\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}=2.$

12. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\times$

$\times\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a.$

13. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\left(\begin{matrix}x=-\alpha \\ x\to 0,\ \alpha\to 0\end{matrix}\quad \frac{2}{x}=-\frac{2}{\alpha}\right)=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}}=$

$=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-2}=e^{-2}.$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}=e^{-1}.$

§ 6. Функциянын предели жана үзгүлтүксүздүгү

$y=f(x)$ функциясы a чекитинин кандайдыр бир аймагында, б. а. a чекитин туткан кандайдыр бир интервалдын бардык чекиттеринде аныкталсын дейлик, a чекитинде функция аныкталбашы да мүмкүн. Предели a боло турган, б. а. $\lim x_n=a$ боло турган

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_n,\ldots \tag{1}$$

удаалаштыгын алабыз, мында ар кандай n үчүн $x_n\neq a$ болсун, б. а. аргументтин мааниси a га абдан эле жакындасын, бирок ага эч убакта барабар болбосун. Аргументтердин (1) удаалаштыгына $y=f(x)$ функциясынын:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ldots,\ f(x_n),\ldots \tag{2}$$

удаалаштыгы туура келсин.

Аныктама. *Эгер аргументтин маанилеринин (1) удаалаштыгы a пределине умтулганда функциянын маанилеринин ага туура келген (2) удаалаштыгы A пределине умтулса, анда A саны $f(x)$ функциясынын $x\to a$ кездеги предели деп аталат да:*

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \tag{3}$$

аркылуу белгиленет. Бул Гейненин аныктамасы. Буга Француз окумуштуусу Коши төмөнкүдөй аныктама берген.

Аныктама. *Эгер мурдатан берилген $\varepsilon>0$ саны канчалык кичине болсо да, $|x-a|<\delta$ (4) барабарсыздыгын канааттандырган бардык x үчүн*

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{5}$$

барабарсыздыгы орундала тургандай болгон $\delta>0$ саны табылса, анда A саны $f(x)$ функциясынын $x\to a$ кездеги предели деп аталат.

Бул эки аныктаманын эквиваленттүү экендигин далилдөөгө болот.

Кошинин аныктамасын: эгер каалагандай $\varepsilon>0$ үчүн $a-\delta<x<a+\delta$, $x\neq a$ шартын канааттандырган бардык x үчүн $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ шарты аткарыла турган $\delta>0$ саны табылса, анда A саны $f(x)$ тин $x\to a$ дагы предели деп аталат десе да болот. Буга геометриялык талкуулоо берсе болот: $(a-\delta,\ a+\delta)$ интервалынын a дан башка бардык чекиттериндеги функциянын маанилери $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ интервалынын ичинде жатуулары тийиш (53-чийме).

Мында δ жалпы айтканда ε дон көз каранды: $\delta=\delta(\varepsilon)$. Эгер ε өзгөрсө, δ да өзгөрөт.

Мисал. $f(x)=2x-1$ функциясы $x\to3$ кезде $A=5$ ке барабар болгон пределге ээ болот.

Муну далилдөө үчүн $\varepsilon>0$ канчалык кичине болсо да, $|x-3|<\delta$ шартын канааттандыруучу бардык x үчүн: $|(2x+1)-5|<\varepsilon$ орундала турган $\delta>0$ санын табууга болорун көрсөтүү жетиштүү болот. Кийинки барабарсыздыкты $2|x-3|<\varepsilon$ же $|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$ деп жазууга болот. Демек, δ ны $0<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ деп алсак эле $(2x-1)$ менен 5 тин айырмасы ε дон кичине болот, демек аныктама боюнча $\lim\limits_{x\to3}(2x-1)=5$ пределине ээ болобуз.

Кээде, $\{x_n\}\to a$ кезде функциянын маанилеринин $\{f(x_n)\}$ удаалаштыгы чектүү A санына эмес $+\infty$ ге (же $-\infty$ ге) умтулушу мүмкүн. Анда $f(x)$ функциясынын $x\to a$ кездеги предели плюс чексиз (же минус чексиз) болот деп айтышат да, аны:

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty\ (\text{же}\ \lim_{x\to a}f(x)=-\infty) \tag{6}$$

түрүндө белгилешет. Алсак, $f(x)=\frac{2}{x-1}$ функциясы $x\to1$ кезде абсолюттук чоңдугу боюнча чексизге умтулат.

Эгер аргументтердин $\{x_n\}$ удаалаштыгы $+\infty$ ге, же $-\infty$ ге умтулганда функциянын маанилеринин $\{f(x_n)\}$ удаалаштыгы A чектүү пределине ээ болсо, анда

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\ \text{же}\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=A \tag{7}$$

түрүндө, ал эми $\pm\infty$ пределдерине умтулса, анда

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty\ \text{же}\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\pm\infty \tag{8}$$

түрүндө жазуу кабыл алынган.

Аныктама. *Эгер x_0 чекитинде жана анын кандайдыр бир аймагында аныкталган $f(x)$ функциясынын $x\to x_0$ дагы предели $f(x_0)$ го, б. а. функциянын x_0 чекитиндеги маанисине барабар болсо:*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\ \text{же}\ \lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x), \tag{9}$$

анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат.

Мына ошентип, чекитте үзгүлтүксүз функция үчүн функциянын белгиси менен пределдин белгисинин орундарын алмаштырууга болот.

Эгер x_0 чекитинде $f(x)$ үзгүлтүксүз болбосо, анда x_0 *үзүлүү чекити* деп аталат.

$f(x)$ тин x_0 чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүнө башкача аныктама берүүгө да болот. x_0 чекитине аргументтин Δx (оң же терс) *өсүндүсүн* берип, $x_0+\Delta x=x$ деп белгилейбиз. $f(x)$ тин маанилеринин: $f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ айырмасын Δy аркылуу белгилеп:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \tag{10}$$

аны *функциянын өсүндүсү* дейбиз.

Аныктама. *Эгер мурдатан берилген $\varepsilon>0$ саны канчалык кичине болсо да, $|x-x_0|<\delta$ шартын канааттандырган бардык x үчүн*

$$|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|<\varepsilon \tag{11}$$

барабарсыздыгы аткарыла турган $\delta>0$ саны табылса, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат.

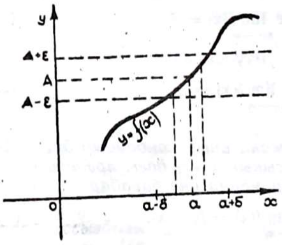
Эгер өсүндүлөр аркылуу айтсак, $|\Delta x|<\delta$ барабарсыздыгы орундалары менен эле $|\Delta y|<\varepsilon$ дагы орундала турган $\delta>0$ саны табылса, $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болот. Демек, x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгон $y=f(x)$ функциясы үчүн $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ барабардыгы орундалат.

Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, в]$ сегментинин же интервалынын бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болсо, анда $f(x)$ ошол сегментте же интервалда үзгүлтүксүз деп аталат.

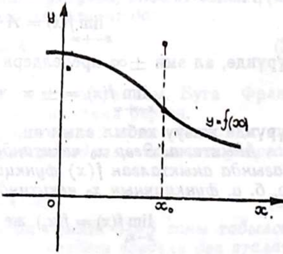
Үзгүлтүксүздүктүн (9) шарты $\Delta x>0$ кезинде:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0-\Delta x)=f(x_0) \tag{12}$$

шартына эквиваленттүү. Мында $x_0+\Delta x$ чекити x_0 го оң жактан, ал эми $x_0-\Delta x$ болсо, сол жактан умтулары белгилүү. Булардын



53-чийме



54-чийме

биринчисин $f(x)$ тин x_0 чекитиндеги *оң жаккы предели* деп, ортоңкусун *сол жаккы предели* деп аташат.

Эгер (12) деги кош барабардыктардын бири эле бузулса, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүккө учурайт.

Үзүлүү чекиттери төмөнкүдөй түрлөргө бөлүнөт.

1. Өз ара барабар болгон $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x-\Delta x)$ пределдери бар болуп, алар $f(x)$ тин x_0 чекитиндеги $f(x_0)$ маанисине барабар болбой калышы; же $f(x_0)$ аныкталбай калышы мүмкүн, б. а.

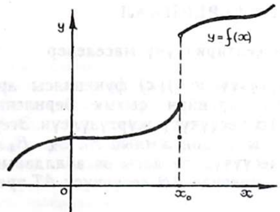
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 - \Delta x) \neq f(x_0) \tag{13}$$

орундалышы мүмкүн. Бул учурда x_0 чекити *жоюла алуучу үзүлүү чекити* деп аталат, анткени $f(x_0)$ дун маанисин өзгөртүп (12) шартты орундатууга болот (54-чийме).

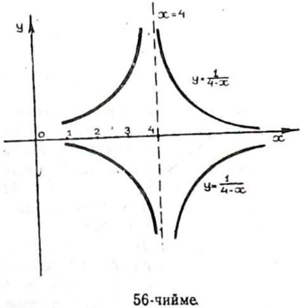
2. Оң жана сол жаккы пределдери чектүү жана $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) \neq$ $\neq \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0-\Delta x)$ болушу мүмкүн. Мында $f(x_0)$ эмнеге барабар экендигине карабастан $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ чекитинде үзүлүшкө учурайт. Мындай үзүлүш *чектүү секиримдүү* деп аталат (55-чийме).

1) жана 2) учурдагы үзүлүү чекиттери *биринчи түрдөгү үзүлүү чекиттери* деп аталат.

3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x)$ жана $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0-\Delta x)$ пределдеринин бири же экөө тең чексизге умтулуп же табылбай жок болуп калышы мүмкүн. Бул учурда $x=x_0$ *экинчи түрдөгү үзүлүү чекити* деп аталат. Алсак, $y=\dfrac{+1}{4-x}$ функциясы $x_0=4$ чекитинде экинчи түрдөгү үзүлүшкө учурайт, анткени $\lim\limits_{x \to \Delta x} f(4+\Delta x) = -\infty$, ал эми $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(4-\Delta x) = +\infty$. Бул функциянын графиги 56-чиймеде берилген.



55-чийме



56-чийме

Үзгүлтүксүздүктүн: каалагандай эң кичине $\varepsilon>0$ үчүн $|\Delta x|<\delta$ болсо эле $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ болсо, $y=f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болот деген аныктамасына таянып, VI главанын § 5 да каралган бардык элементардык функциялардын өздөрү аныкталган областта үзгүлтүксүз функциялар экендигин далилдөөгө болот.

§ 7. Үзгүлтүксүз функциялардын касиеттери

1-теорема. *Чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын алгебралык суммасы үзгүлтүксүз болот.*

Алсак, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$ болсун. $F(x)=f(x)\pm\varphi(x)$ десек, алгебралык сумманын предели жөнүндөгү теорема боюнча:

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm\varphi(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=f(x_0)\pm\varphi(x_0)=$$

$=F(x_0)$ орундалат. Демек, $F(x)$, б. а. берилген функциялардын алгебралык суммасы үзгүлтүксүз болот.

2-теорема. *Чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын көбөйтүндүсү үзгүлтүксүз болот.*

3-теорема. *Үзгүлтүксүз эки функциянын тийиндиси, бөлүмү нөлдөн айырмалуу болгон чекиттердин бардыгында үзгүлтүксүз болот.*

4-теорема. *Үзгүлтүксүз функциядан үзгүлтүксүз функция болгон татаал функция үзгүлтүксүз болот.*

5-теорема. *Эгер $y=f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болсо жана ага бир маанилүү тескери функция бар болсо, анда ал тескери функция үзгүлтүксүз болот.*

Ушул теоремалар 1-си сыяктуу эле далилденет, аларды далилдөөнү өзүңөргө сунуш кылабыз.

VIII ГЛАВА

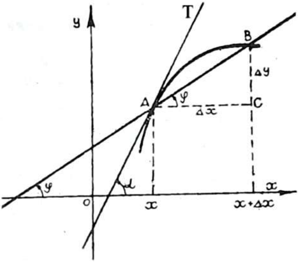
ТУУНДУ ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Туундунун түшүнүгүнө келтирилүүчү маселелер

1. Ийри сызыкка жаныма жүргүзүү. $y=f(x)$ функциясы аркылуу туюнтула турган кандайдыр бир ийри сызык берилсин. Анын A жана B чекити аркылуу AB кесүүчүсү жүргүзүлсүн. Эгер B чекити ийри сызыкты бойлоп, A ны көздөй жылып B_1, B_2, B_3,... абалдарын ээлесе, AB_1, AB_2, AB_3 кесүүчүлөрү дагы өз абалдарын өзгөртөт. B чекити A менен дал келишкенде AB кесүүчүсү AT пределдик абалына ээ болсун.

Аныктама. *Ийри сызыктын A жана B чекиттери аркылуу өткөн кесүүчүсүнүн, B чекити ийри сызык боюнча жылып, A га дал келишүүгө чейин умтулган кездеги пределдик абалы AT, ал ийри сызыктын A чекитиндеги жанымасы деп аталат.*

Эгер $B \to A$ кезде AB кесүүчүсүнүн пределдик абалы болбосо, анда ийри сызыктын A чекитинде жанымасы жок болот. AB кесүүчүсү Ox огунун оң багыты менен φ бурчун түзсүн, $B \to A$ кездеги анын AT пределдик абалы α бурчун түзсүн, анда $\mathrm{tg}\varphi$ жана $\mathrm{tg}\alpha$ ирети менен AB кесүүчүсүнүн жана AT жанымасынын бурчтук коэффициенти болору белгилүү (57-чийме).



57-чийме

Мындагы $\Delta x \to 0$ кезде B чекити A га умтулуп, φ бурчу α бурчуна умтулат. $\triangle ABC$ дан $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ошондуктан

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\,\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Ошентип, ийри сызыктын $A(x_0, y_0)$ чекитиндеги жанымасынын бурчтук коэффициенти (1) формула боюнча табылат.

2. Бир калыпта эмес кыймылдын ылдамдыгы. M чекити кандайдыр бир түз сызык боюнча кыймылга келсин, аны OX огу деп эсептейли. Убакыттын t моментине $S = OM$ аралыгы туура келсин, демек өтүлгөн жол t убагынан көз каранды болот:

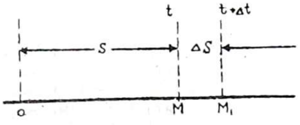
$$S = f(t). \tag{2}$$

Дагы өткөн Δt дан кийинки $t + \Delta t$ моментине $S + \Delta S$ жолу туура келсин, б. а. Δt убакыт ичинде ΔS аралыгын өтсүн (58-чийме).

Демек, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ катышы M чекитинин кыймылынын орточо ылдамдыгын туюнтат:

$$v_{\text{орт}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{3}$$

Эгер кыймыл бир калыпта болсо бул катыш туруктуу болуп чыныгы ылдамдыкты туюнтат. Эгер кыймыл бир калыпта эмес болсо, бул катыш өзгөрмөлүү болуп, Δt убакыт ичиндеги орточо ылдамдыкты гана туюнтат. Убакыттын t моментиндеги чыныгы ылдамдыкты табуу үчүн $\Delta t \to 0$ кезде (3) катыштын пределин табуу керек:



58-чийме

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{орт}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{4}$$

§ 2. Туундунун аныктамасы, геометриялык жана механикалык мааниси

$x=x_0$ чекитинин кандайдыр бир аймагында аныкталган $y=f(x)$ функциясы берилсин. x_0 го Δx өсүндүсүн бергенде $x_0+\Delta x$ чекити $f(x)$ тин аныкталуу областына таандык болсун, бул учурда $f(x)$ функциясы $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ өсүндүсүнө ээ болот.

Аныктама. *Эгер* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *катышы* $\Delta x\to 0$ *да чектүү пределге ээ болсо, анда ал предел* $f(x)$ *функциясынын* x_0 *чекитиндеги* ***туундусу*** *деп аталат да,* y', $f'(x_0)$ же $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ *символдорунун бири менен белгиленет.*

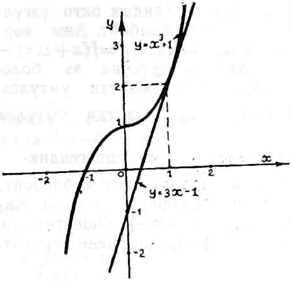
Ошентип, туунду
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{5}$$
барабардыгы аркылуу *аныкталат. x тин түрлүү маанилеринде* $f'(x)$ дагы түрлүү мааниге ээ болуп, x тен функция болот. $x=x_0$ чекитиндеги туунду: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $y'|x=x^0|$ *же* $\frac{df(x_0)}{dx}$ аркылуу белгиленет.

Жогоруда ийри сызыктын $A(x_0, y_0)$ чекитиндеги жанымасын аныктап, анын бурчтук коэффициенти (1) формула аркылуу туюнтуларын көрсөттүк. Эгер (5) аныктаманы эске алсак:
$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \text{б. а.}\ \operatorname{tg}\alpha=y'\tag{6}$$
экендиги келип чыгат. Мына ушул (6) барабардык *туундунун геометриялык маанисин* туюнтат.

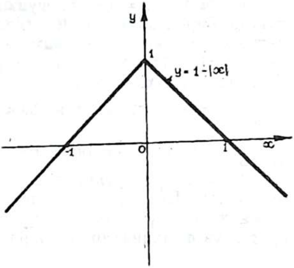
$f(x)$ тин x_0 чекитиндеги $f'(x_0)$ туундусу $y=f(x)$ теңдемеси аныктаган ийри сызыктын $M_0(x_0, f(x_0))$ чекитиндеги *жанымасынын бурчтук коэффициентине* барабар.

$y=f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги $f'(x_0)$ туундусу бар болсо, ал функция аныктаган ийри сызыктын $M_0(x_0, f(x_0))$ чекитиндеги жанымасы толук аныкталган болот. Чынында эле ал жанымanын теңдемеси
$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)\tag{7}$$
болору аналитикалык геометриядан белгилүү. Ийри сызыкка M_0 чекитинде жүргүзүлгөн нормалдын теңдемеси
$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\tag{8}$$
болору белгилүү (анткени M_0 чекитинде жанымага перпендикуляр түз сызык нормаль деп аталат).

Мисал. $y=x^3+1$ функциясы аныктаган ийри сызыктын $M_0(1, 2)$ чекитине жаныма жүргүзгүлө. x ке Δx өсүндүсүн берсек, y функциясы: $\Delta y=[(x+\Delta x)^3+1]-(x^3+1)=3x^2\Delta x+3x\cdot\Delta x^2$ өсүндүсүнө ээ болот. Анын эки жагын тең Δx ке бөлүп, пределге өтсөк: $\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2$, $k=\operatorname{tg}\alpha|_{x=1}=3$ табылат. $M_0(1, 2)$ че-



59-чийме



60-чийме

кити аркылуу өткөн түз сызыктын (жанымaнын) тендемеси: $y-2=3(x-1)$ же $y=3x-1$ болору белгилүү. Изделген жаныма ушул (59-чийме).

Биз жогоруда бир калыпта эмес кыймылдын ылдамдыгы (4) боюнча аныкталарын көрдүк, (5) аныктама боюнча

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t},\ v=s'(t) \tag{9}$$

экендигине ынанабыз.

Мындан: *Бир калыпта эмес кыймылдын v ылдамдыгы өтүлгөн жолдон t убакыты боюнча алынган туундуга барабар* болот деген корутунду чыгарабыз. Бул *туундунун механикалык маанисн* болот.

Функциянын *туундусун табууну* ал функцияны *дифференцирлөө* деп, *туундуга ээ болуучу функцияларды дифференцирленүүчү* деп аташат.

§ 3. Туундуга ээ болуучу функциянын касиети

Теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы дифференцирленүүчү болсо, анда ал үзгүлтүксүз болот. Тескерисинче тыянак туура эмес: үзгүлтүксүз функция туундуга ээ болбошу ыктымал.*

Д а л и л д ө ө. $f(x)$ функциясы $x=x_0$ чекитинде чектүү туундуга ээ болсун, б. а. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y_x^1$ барабардыгы орундалсын. Анын, α чексиз кичирейүүчү чондук кезинде $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y_x^1+\alpha$ барабардыгына эквиваленттүү экендиги белгилүү. Акыркы барабардыкты $\Delta y=y_x^1\cdot\Delta x+\alpha\,\Delta x$ түрүндө жазып, $\Delta x\to 0$ да пределге өтсөк, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ болору ачык, демек $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз.

Ал эми $f(x)=1-|x|$ функциясы бүткүл сандык окто үзгүлтүксүз, бирок ал $x_0=0$ чекитинде туундуга ээ болбойт. Аны көрсөтүү үчүн x ке Δx өсүндүсүн берелик, анда $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=[1-|x+\Delta x|]-[1-|x|]=-|\Delta x|$ өсүндүсүнө ээ болобуз. Демек, $\Delta x>0$ болуп, $x_0=0$ чекитине оң жактан умтулса, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$ ге, ал эми $\Delta x<0$ болуп, сол жактан умтулса $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$ ге ээ болобуз. Бул эки предел дал келишпегендиктен $f(x)=1-|x|$ функциясы $x_0=0$ чекитинде туундуга ээ болбойт, бул болсо $M_0(0, 1)$ чекитинде функциянын графигине жалпы жаныма жүргүзүүгө болбостугун көрсөтөт (60-чийме). Ошентип, үзгүлтүксүз функциялардын бардыгы эле дифференцирлене бербейт.

§ 4. Туунду алуунун эрежелери

I. *Турактуу санды дайыма туундунун белгисинин сыртына чыгарууга болот,* б. а. $y=C\cdot f(x)$, $C=\text{const}$ болсо, анда $y'=C\cdot f'(x)$ болот. Чындыгында эле $y+\Delta y=C\cdot f(x+\Delta x)$

$$\Delta y=C\cdot f(x+\Delta x)-C\cdot f(x)=C\cdot[f(x+\Delta x)-f(x)]$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=C\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$y_x^1=C\cdot f'(x). \tag{1}$$

II. Ар бир кошулуучусу туундуга ээ болгон *алгебралык сумманын туундусу кошулуучулардын туундуларынын алгебралык суммасына барабар,* б. а. эгер $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ болсо, анда $y=u\pm v$ функциясынын туундусу $y'=u'+v'$ болот.

Д а л и л д өө. x аргументине Δx өсүндүсүн бергенде u, v жана y функциялары дагы ирети менен Δu, Δv жана Δy өсүндүлөрүнө ээ болушат, анда

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v).$$

Мындан:

$$\Delta y=\Delta u\pm\Delta v,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Эми $\Delta x\to 0$ пределге өтсөк,

$$y'=u'\pm v'. \tag{2}$$

Э с к е р т ү ү. Бул эреже чектелген сандагы кошулуучулар үчүн да туура болот.

III. Эгерде $u=\varphi(x)$ *жана* $v=\psi(x)$ *функциялары туундуларга ээ болушса, анда алардын көбөйтүндүсү* $y=u\cdot v$ *дагы туундуга ээ болот жана ал туунду* $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ *га барабар болот.*

Жогорудагыдай эле x аргументи Δx өсүндүсүн алса, u, v жана y функциялары ирети менен Δu, Δv жана Δy өсүндүлөрүнө ээ болушат, анда

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v),$$
$$\Delta y=u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Мында $\Delta x\to 0$ кезде u менен v нын аныкталышы боюнча $\Delta u\to 0$ жана $\Delta v\to 0$, ошентип пределге өтсөк

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

же

$$y'=u\cdot v'+v\cdot u' \tag{3}$$

туундусуна ээ болобуз. Эреже далилденди.

Эгерде $y=u\cdot v\cdot W$ болсо, анда азыркы эле эреже боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y'=[(u\cdot v)\cdot W]'=(u\cdot v)\cdot W'+(u\cdot v)'\cdot W=u\cdot v\cdot W'+$$
$$+u\cdot v'\cdot W+u'\cdot v\cdot W \tag{3 а}$$

Ал эми көбөйтүүчүлөрдүн саны n болсо ушул сыяктуу эле топтоштуруп туунду алып отуруп анын туундусу төмөнкүгө барабар экендигин көрсөтүүгө болот:

$$y'=[u\cdot v\cdot W\ldots z]'=u\cdot v\cdot W\ldots z'+\ldots+uvW'\ldots z+$$
$$+uv'W\ldots z+u'\cdot v\cdot W\ldots z. \tag{3 б}$$

IV. *Эгерде $u=\varphi(x)$ жана $v=\psi(x)$ функциялары туундуларга ээ болушса жана $v'(x)\neq 0$ болсо, анда алардын катышы $y=\frac{u}{v}$ дагы туундуга ээ болот жана анын туундусу $y'=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2}$ ка барабар болот.*

Жогорудагы сыяктуу эле төмөнкүнү жаза алабыз:

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$$

$$\Delta y=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v\cdot(v+\Delta v)},\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Мында $\Delta x\to 0$ да $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$ эске алсак,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)},$$

демек

$$y'=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2} \tag{4}$$

Ушул жерде турактуу чондуктун туундусу нөлгө барабар экендигин көрсөтө кетебиз. $y=C=\text{const}$ болсо, $y+\Delta y=C$, $\Delta y=0$, ошондуктан $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ катышы дайыма нөлгө барабар болот, б. а. $y'=0$.

Бөлчөктүн туундусун алууда төмөнкүдөй эки учурду өзгөчө эске тутуп алуу керек.

а) $y=\frac{C}{v}$, ($C=\text{const}$) болгон учурда IV эреже боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y'=\frac{v\cdot C'-C\cdot v'}{v^2}=-\frac{C\cdot v'}{v^2}, \tag{4a}$$

анткени $C'=0$. Мындан төмөнкүдөй корутундуга келебиз: *алымы турактуу болгон бөлчөктүн туундусун алуу үчүн бөлчөктүн бөлүмүн квадратка көтөрүп, бөлүмүнүн туундусун алымы менен көбөйтүп, алдына терс белги коюш керек.*

б) $y=\frac{u}{C}$ ($C=\text{const}$ болсун). Бул учурда бөлчөктүн бөлүмү турактуу болгондуктан, аны $y=\frac{1}{C}\cdot u$ деп жазсак, $\frac{1}{C}$ саны турактуу чоңдук болгондуктан, туундунун белгисинин сыртында калтырып, I эреже боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y'=\frac{1}{C}\cdot u' \tag{4б}$$

Ошентип, *бөлүмү турактуу болгон бөлчөктөн туунду алуу үчүн анын алымынан гана туунду алабыз.*

§ 5. Татаал функциянын туундусу

Бизге $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсин. Ушул y татаал функциясынын көз каранды эмес x чоңдугу боюнча алынган туундусун y'_x табуу керек болсун. Бул туунду жөнүндө төмөнкүдөй теореманы далилдөөгө болот.

Теорема. *Эгерде: 1) $u=\varphi(x)$ функциясы кандайдыр бир x_0 чекитинде $u'_x=\varphi'_x(x_0)$ туундусуна ээ болсо, 2) $y=f(u)$ функциясы ошол x_0 го туура келген $u_0=\varphi(x_0)$ чекитинде $y_u=f'_u(u_0)$ туундусуна ээ болсо, анда $y=f[\varphi(x)]$ татаал функциясы дагы ошол x_0 чекитинде туундуга ээ болот жана ал туунду $f(u)$ менен $\varphi(x)$ функцияларынын туундуларынын көбөйтүндүсүнө барабар болот:*

$$[f(\varphi(x))]'=f'_u(\varphi(x_0))\cdot\varphi'_x(x_0)$$

же кыскача түрдө

$$y'_x=f'_u\cdot u'_x. \tag{5}$$

Теореманы далилдөө максатында x ке Δx өсүндүсүн беребиз, анда $u=\varphi(x)$ болгондуктан, арадагы u аргументи Δu өсүндүсүнө, ал эми y функциясы Δy өсүндүсүнө ээ болот. y тин x боюнча алынган туундусун табуу үчүн, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ катышышынын $\Delta x\to 0$ кездеги пределин табуубуз керек.

Жетишерлик түрдө кичине болгон Δx тердин бардыгы үчүн Δu өсүндүсү нөлдөн айырмалуу болсун дейлик: $\Delta u \neq 0$. Анда $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ катышын

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

деп жазууга болот, мындан $\Delta x \to 0$ кезде, пределге өтсөк

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Мында $u = \varphi(x)$ үзгүлтүксүз болгондуктан $\Delta x \to 0$ да, Δu дагы нөлгө умтулат, ошентип,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

формуласына ээ болобуз.

§ 6. Элементардык функциялардын туундулары

1) Даражалуу функциянын туундусу. $y = x^n$ (мында n натуралдык сан) болсун. Ушул даражалуу функциянын туундусун табабыз.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n,$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots +$$

$$+ (\Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Эми $\Delta x \to 0$ пределге өтсөк, оң жакты экинчи мүчөдөн баштап бардык кошулуучулар Δx ти туткандыктан, алардын пределдери нөлгө умтулушат, ошентип,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} \text{ же } y' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

Ал эми эгерде $y = u^n$, $u = \varphi(x)$ болсо, татаал функциянын туундусу боюнча

$$y' = nu^{n-1} \cdot u'_x \qquad (1')$$

болот.

Биз төмөн жакта (1) формуланын ар кандай μ анык даража үчүн да туура экендигин далилдейбиз.

Мисал. 1) $y = x^9$; $y' = 9x^8$.
2) $y = x^{15}$; $y' = 15x^{14}$.

Төмөнкүдөй айрым учурларга токтолобуз:

а) $n = 1$, $y = x$ болсун, анда $\Delta y = \Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 1.$ (1а) б) $n=\frac{1}{2}$, $y=\sqrt{x}$ болсун, анда $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$, $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\cdot(\sqrt{x\cdot\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ошентип,

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad\text{болот.}\qquad (1\text{-б})$$

Эгерде $y=\sqrt{u}$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсе, анда анын туундусу

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'_x\qquad (1\text{-в})$$

формуласы боюнча табылат.

Мисал.

$$y=\sqrt{6x^2-1},\quad y'_x=\frac{1}{2\sqrt{6x^2-1}}\cdot 12x=\frac{6x}{\sqrt{6x^2-1}}.$$

2) Көрсөткүчтүү функциянын туундусу. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ функциясы берилсин. Анын туундусун табабыз.

$$y+\Delta y=a^{x+\Delta x},$$

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta y}=a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.\qquad (*)$$

Бул пределди табуу үчүн $a^{\Delta x}-1=\beta$ деп белгилейбиз. Анда $a^{\Delta x}=1+\beta$, $\Delta x=\log_a(1+\beta)$. Биздин белгилөөбүз боюнча $\Delta x\to 0$ кезде β дагы нөлгө умтулат. Ошентип,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(1+\beta)}=\frac{1}{\lim\limits_{\beta\to 0}\frac{\log_a(1+\beta)}{\beta}}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{\beta\to 0}\log_a\left(1+\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

Эми $\beta=\frac{1}{t}$ десек, $\beta\to 0$ кезде $t\to\infty$.

Анда

$$\lim_{\Delta\beta\to 0}\log_a\left(1+\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}=\lim_{t\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\log_a\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\log_a e,$$

демек

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{1}{\log_a e}.$$

Экинчи жактан $z=\log_a e$ десек, мындан $e=a^z$ экендигин аныктайбыз. Ушул барабардыкты натуралдык логарифм боюнча логарифмдейбиз, анда $1=z\cdot\ln a$ же $z=\frac{1}{\ln a}$, ошентип, $\log_a e=\frac{1}{\ln a}$, демек анда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a$$

болот. Муну (*) барабардыгына коюп, акырында төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\ln a \text{ же } y'_x=a^x\cdot\ln a. \tag{2}$$

Эгерде $y=a^u$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсе, анда

$$y'_x=a^u\cdot\ln a\cdot u'_x \tag{2a}$$

туундусуна ээ болобуз.

Эскертүү. Эгерде $a=e$ болсо, б. а. $y=e^x$ функциясы берилсе, $\ln e=1$ болгондуктан, анын туундусу $y'=e^x$ болот.

Мисалдар. 1) $y=5^x$; $y'=5^x\cdot\ln 5$.

2) $y=2^{3x^2}$; $y'=2^{3x^2}\cdot\ln 2\cdot(3x^2)'=6x\cdot 2^{3x^2}\cdot\ln 2$.

3) Логарифмдик функциянын туундусу. Бизге $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1,\ 0<x<\infty)$ функциясы берилсин. Анын туундусун табабыз.

$$y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x),$$

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}};\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Мында $\frac{\Delta x}{x}=\beta$ десек, $\Delta x\to 0$ да β дагы нөлгө умтулат, ошону менен катар төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\lim_{\beta\to 0}\log_a(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

Ошентип, акырында төмөнкүнү табабыз:

$$y'=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{1}{x\cdot\ln a}. \tag{3}$$

Эгерде бизге $y=\log_a u$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсе, анда

$$y'_x=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'_x \text{ болот.} \tag{3'}$$

Мисалдар.

$$1)\ y=\log_5 x;\quad y'=\frac{1}{x}\log_5 e=\frac{1}{x\cdot\ln 5}.$$

$$2)\ y=\log_3 4x;\quad y'=\frac{1}{4x\cdot\ln 3}\cdot(4x)'=\frac{1}{x\ln 3}.$$

Эскертүү. Эгер $y=\ln x$, б. а. $a=e$ болсо, анда $y'=\frac{1}{x}$ болот, анткени бул учурда $\ln e=1$. Ал эми $y=\ln u$, $u=\varphi(x)$ болсо, $y'=\frac{u'_x}{u}$ болот.

4) *Тригонометриялык функциялардын туундулары.* а) Бизге $y=\sin x$ функциясы берилсин. Анда

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x),$$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x,$$

анткени $\frac{\Delta x}{2}=\alpha$ десек, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$

Ошентип,

$$y'=\cos x. \tag{4}$$

Эгерде бизге $y=\sin u$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсе, анда

$$y'=\cos u\cdot u'_x \text{ болот.} \tag{4a}$$

Мисалдар. 1) $y=\sin^3 x=(\sin x)^3$.

$$y'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'=3\sin^2 x\cdot\cos x=\frac{3}{2}\sin 2x\cdot\sin x.$$

$$2)\quad y=\sin(7x-1);\quad y'=\cos(7x-1)\cdot(7x-1)'=$$
$$=7\cos(7x-1).$$

б) $y=\cos x$ функциясынын туундусун табабыз.

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x),$$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\left(\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Мындан, $\Delta x\to 0$ кезде пределге өтсөк,

$$y'=-\sin x \tag{5}$$

экендигин табабыз.

Ал эми $y=\cos u$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсе, анда анын туундусу:

$$y'=-\sin u\cdot u_x \tag{5a}$$

Мисалдар. 1) $y=\cos^3 x=(\cos x)^3$.

$$y'=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'=-3\cos^2 x\sin x$$

2) $y=\cos 5x$. $y'=-\sin 5x\cdot(5x)'=-5\sin 5x$.

в) $y=\operatorname{tg}x$ функциясынын туундусун табабыз. Ал үчүн $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ бөлчөгүнүн туундусун табабыз.

$$y'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x. \tag{6}$$

Эгерде $y=\operatorname{tg}u$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсе, анда, анын туундусу

$$y'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'_x=\sec^2 u\cdot u'_x \tag{6a}$$

болот.

Мисалдар.

1) $y=\operatorname{tg}^5 x$; $y'=5\operatorname{tg}^4 x\cdot(\operatorname{tg}x)'=5\operatorname{tg}^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=$
$=5\operatorname{tg}^4 x\cdot\sec^2 x$.

2) $y=\operatorname{tg}3x$; $y'=\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)'=\frac{3}{\cos^2 3x}=3\sec^2 3x$.

г) $y=\operatorname{ctg}x$ функциясынын туундусун табуу үчүн $y=\frac{\cos x}{\sin x}$ бөлчөгүнүн туундусун табуу керек.

$$y'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x. \tag{7}$$

Эгер $y=\operatorname{ctg}u$, $u=\varphi(x)$ татаал функция берилсе, анда

$$y'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'_x=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot u'_x. \tag{7a}$$

Мисалдар.

1) $y=\operatorname{ctg}^3 x$; $y'=3\operatorname{ctg}^2 x\cdot(\operatorname{ctg}x)'=-3\operatorname{ctg}^2 x\times$
$\times\frac{1}{\sin^2 x}=-3\operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{cosec}^2 x$.

2) $y=\operatorname{ctg}4x$; $y'=-\frac{1}{\sin^2 4x}\cdot(4x)'=-4\operatorname{cosec}^2 4x$.

д) $y=\sec x$ функциясынын туундусун табуу үчүн $y=\frac{1}{\cos x}$ бөлчөгүнөн туунду алуу керек.

$$y'=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\cdot\sec x \tag{8}$$

Эгер $y=\sec u$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсе, анда

$$y'=\operatorname{tg} u\cdot\sec u\cdot u'_x \tag{8a}$$

болот.

е) Ал эми $y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ болсо, анда

$$y'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{cosec} x. \tag{9}$$

Эгер функция $y=\operatorname{cosec} u$, $u=\varphi(x)$ татаал болсо, анда

$$y'=-\operatorname{ctg} u\cdot\operatorname{cosec} u\cdot u'_x \tag{9'}$$

болот.

§ 7. Тескери функциянын туундусу

Тескери функциянын туундусу жөнүндө төмөнкүдөй теореманы далилдейбиз.

Теорема. *Эгерде 1) $f(x)$ функциясы жогору жактагы тескери функциянын бар экендиги жөнүндөгү теореманын шарттарын канаатандырса, 2) $x=x_0$ чекитинде* ч е к т е л г е н *жана* н ө л д ө н а й ы р м а л у у *болгон туундуга ээ болсо, анда ага туура келүүчү $y_0=f(x_0)$ чекитинде $x=g(y)$ тескери функциясы дагы туундуга ээ болот жана бул туунду $\frac{1}{f'(x_0)}$ го барабар болот.*

Д а л и л д ө ө. $y=y_0$ чекитине Δy өсүндүсүн беребиз, анда $x=g(y)$ функциясы Δx өсүндүсүнө ээ болот. Ал эми эгерде $\Delta y\neq 0$ болсо, анда $y=f(x)$ функциясы бир маанилүү функция болгондуктан, Δx дагы нөлдөн айырмалуу болот: $\Delta x\neq 0$. Демек, анда

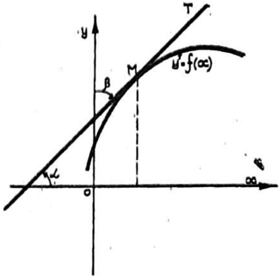
$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \tag{10}$$

деп жаза алабыз. Ал эми мындан $\Delta y\to 0$ да пределге өтсөк $x=g(y)$ функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, Δx өсүндүсү да нөлгө умтулат: $\Delta x\to 0$, натыйжада биз төмөнкүгө ээ болобуз:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}, \tag{10a}$$

анткени (10) барабардыгынын оң жагынын бөлүмү $f'(x_0)\neq 0$ пределине ээ болот, ал эми анын тескери чоңдугу $\frac{1}{f'(x_0)}$ болсо, $g'(y_0)$ туундусун туюнтат.

Бул (10a) формуланы геометриялык жол менен төмөнкүчө талкуулоого болот. y'_x туундусу $y=f(x)$ теңдемеси менен туюнтулган ийри сызыкка жүргүзүлгөн жаныманын Ox огу менен түзгөн α бурчунун тангенси экендигин билебиз. Ал эми $x=g(y)$ функциясы ошол эле ийри сызыкты туюнтат, бирок мында y көз каранды эмес чоңдугун Oy огуна коюш керек. Ошентип, бул учурда x'_y болсо, ийри сызыкка жүргүзүлгөн ошол эле жаныманын OY огу менен түзгөн β бурчунун тангениси болуп саналат (61-чийме).



61-чийме

Ошентип, (10a) барабардыгын

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

деп жазууга болот, бул формула болсо, суммасы $\frac{\pi}{2}$ барабар болгон α жана β бурчтарын байланыштырат.

Эми тескери тригонометриялык функциялардын туундуларын аныктайбыз. Ушул максатта $x=g(y)$ тескери функциясында y аргументи менен x функциясынын ролдорун алмаштырабыз, б. а. өзүбүздүн көнүгүп калышыбыз боюнча $y=g(x)$ деп x ти аргумент деп эсептейбиз, анда (10a) барабардыгы

$$y'_x=\frac{1}{x'_y} \tag{11}$$

болуп жазылат.

§ 8. Тескери тригонометриялык функциялардын туундулары

а) Бизге $-1<x<1$ аралыгында аныкталган $y=\arcsin x$ функциясы берилсин, мында $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ болсун дейлик. Бул функция $x=\sin y$ функциясынын тескери функциясы болуп саналат. Ал функция $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ аралыгында $x'_y=\cos y$ оң туундусуна ээ болот. Бул учурда (11) формуласы боюнча

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{12}$$

туундусуна ээ болобуз.

Биз $x=\pm1$ болгон учурду карабайбыз, анткени ага туура келген $y=\pm\frac{\pi}{2}$ маанилери үчүн $x'_y=0$.

Эгерде $y=\arcsin u$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсе, анда анын туундусу

$$y'_x=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'_x \tag{12a}$$

болот. Мисал $y=\arcsin(x^2)$; $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot(x^2)'=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

б) Ал эми $-1<x<1$ аралыгында аныкталган $y=\arccos x$ функциясын алсак, ал $-\pi<y<\pi$ аралыгында аныкталган $x=\cos y$ функциясынын тескери функциясы болот, мында $x'_y=-\sin y$ болгондуктан (11) формула боюнча

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{13}$$

Эгерде $y=\arccos u$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсе, анын туундусу төмөнкүчө табылат:

$$y'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'_x \tag{13a}$$

в) $y=\operatorname{arctg} x$ $(-\infty<x<\infty)$ функциясы $x=\operatorname{tg} y$ функциясынын тескери функциясы болуп саналат; ал эми $x'_y=\sec^2 y$ болгондуктан, (11) боюнча

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}. \tag{14}$$

Эгерде y $\operatorname{arctg} u$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы берилсе, анын туундусу төмөнкүчө табылат:

$$y'_x=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'_x. \tag{14a}$$

г) Жогорудагыдай эле $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ $(-\infty<x<\infty)$ үчүн

$$y'_x=-\frac{1}{1+x^2}, \tag{15}$$

ал эми $y=\operatorname{arc\,ctg} u$, $u=\varphi(x)$ татаал функциясы үчүн

$$y'_x=-\frac{u'_x}{1+u^2}, \tag{15'}$$

формуласын табууга болот.

§ 9. Логарифмдик туунду

Бир кыйла татаал функциялардын туундуларын аныктоодо, аларды эң мурда логарифмдеп, анан логарифмдин туундусун табуу оңоюраак болот.

Аныктама. *$y=f(x)$ функциясынын туундусунун ошол функциянын өзүнө болгон катышы логарифмдик туунду деп аталат,* *б. а. эгерде $y=f(x)>0$ болсо, анда анын логарифмдик туундусу:*

$$\frac{y'}{y}=[\ln y]'=[\ln f(x)]'$$

болот.

Эгер $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ болсо, $y=u^v$ функциясы *даража-көрсөткүчтүү функция* деп аталат. Мына ушул функциянын туундусун табууну, логарифмдик туунду бир кыйла жеңилдетет.

1) Ал үчүн эң мурда $y=u^v$ функциясын натуралдык логарифм боюнча логарифмдейбиз. Анда $\ln y=v\cdot\ln u$ барабардыгына ээ болобуз. Эки жагынан тең туунду алабыз:

$$\frac{y'}{y}=v'\cdot\ln u+\frac{v}{u}\cdot u'$$

же

$$y'=y\left[v'\ln u+\frac{v}{u}\cdot u'\right]=u^v\left[v'\ln u+\frac{v}{u}\cdot u'\right],$$

акырында

$$y'=u^v\cdot\ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'. \tag{16}$$

Ошентип, $y=u^v$ даража-көрсөткүчтүү функциядан туунду алуу үчүн биринчи жолу аны даражасы татаал көрсөткүчтүү функция катары дифференцирлөө керек, андан соң аны негизи татаал болгон даражалуу функция катары дифференцирлөө керек.

Мисалдар. 1) $y=(\sin x)^{5x}$

$y'=5(\sin x)^{5x}\ln(\sin x)+5x(\sin x)^{5x-1}\cdot\cos x.$

2) $y=x^x$

$y'=x^x\cdot\ln x+x\cdot x^{x-1}=x^x\ln x+x^x=x^x(\ln x+1).$

Бул мисалдарды логарифмдик туунду аркылуу дагы чыгарууга болот, алсак, 1) мисалдан:

$$\ln y=5x\ln(\sin x),$$

$$\frac{y'}{y}=5\ln(\sin x)+5x\cdot\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y'=(\sin x)^{5x}\left[5\ln(\sin x)+5x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right],$$

$$y'=5(\sin x)^{5x}\cdot\ln(\sin x)+5x\cdot(\sin x)^{5x-1}\cdot\cos x.$$

Ошентип, жогорудагы туундунун өзүнө ээ болдук.

2) Эми $y=x^\mu$ даражалуу функциянын μ даражасы ар кандай анык сан болгон кездеги туундусун табабыз. Бул жерде дагы логарифмдик туундуну пайдаланабыз:

$$\ln y=\mu\ln x;\qquad \frac{y'}{y}=\mu\frac{1}{x};\qquad y'_x=\mu\frac{x^\mu}{x}=\mu x^{\mu-1}.$$

Ошентип, жогоруда бизге белгилүү болгон даражанын туундусунун формуласы, μ ар кандай анык сан болгон учурда да сакталат.

Мисалдар.

$$1)\ y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=x^{-\frac{1}{4}};\qquad y'=-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}=-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}=-\frac{1}{4x\sqrt[4]{x}}.$$

2) $y=\sqrt[5]{(3x-1)^4}=(3x-1)^{\frac{4}{5}}$

$$y'=\frac{4}{5}(3x-1)^{-\frac{1}{5}}\cdot 3=\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{3x-1}}.$$

§ 10. Айкын эмес функциянын туундусу

$F(x, y)=0$ теңдемеси аркылуу айкын эмес y функциясы берилип, анын y'_x туундусун табуу керек болсун. Мындай y_x туундусун табуу үчүн $F(x, y)=0$ теңдемесин y ке карата чыгарып отурбай эле, y ти x тен функция деп эсептеп, бул теңдеменин эки жагын тең x боюнча дифференцирлеп чыгып, пайда болгон теңдемени y'_x ке карата чыгаруу жетиштүү болот.

Мисалдар. 1. $e^y-e^{-x}+xy=0$ аркылуу берилген айкын эмес функциянын туундусун аныктагыла.

Эң мурда x боюнча дифференцирлейбиз:

$e^y\cdot y'+e^{-x}+y+x\cdot y'=0$. Мындан, $y'=-\dfrac{y+e^{-x}}{x+e^y}$.

2. $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$. $y'=?$

$$e^x\sin y+e^x\cos y\cdot y'+e^y\cos x\cdot y'+e^{-y}\sin x=0,$$

$$y'=-\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^y\cos x}.$$

3. $y^2=2px$ параболасына $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде жаныма жүргүзгүлө. Мында $2y\cdot y'=2p$, $y'=\dfrac{p}{y}$, демек $y'\Big|_{x=x_0}=\dfrac{p}{y_0}$.

Жаныманын теңдемеси $y-y_0=\dfrac{p}{y_0}(x-x_0)$ же $y\cdot y_0-y_0^2=px-px_0$, $y_0^2=2px_0$ экендигин эске алсак: $y\cdot y_0=p(x+x_0)$ жанымасына ээ болобуз.

§ 11. Параметрдик түрдө берилген функциянын туундусу

Эми функциялык көз карандылык $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ параметрдик түрдө берилсин жана анын y_x туундусун табуу керек болсун. Ал үчүн t ны x тен функция деп карасак: $y=y[t(x)]$ функциясына келебиз. Аны татаал функция катары дифференцирлесек:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

формуласына келебиз. Эгер буга тескери функциянын туундусунун:

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$ формуласын колдонсок, $y'_x=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ же $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$

формуласына ээ болобуз.

Мисалдар. 1. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоидасына $t=\frac{\pi}{2}$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин жазгыла. Ийри сызыкты жана жаныманы түзгүлө.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2};\quad y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1.$$

$$t=\frac{\pi}{2}\ \text{де}\ x_0=a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{a}{2}(\pi-2);\quad y_0=a.$$

Демек, жаныманын теңдемеси: $y-a=1\cdot\left[x-\frac{a}{2}(\pi-2)\right]$ же $y=x+\frac{(4-\pi)a}{2}$ болот.

2. $x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$ гипоциклоидасына $t_0=\frac{\pi}{4}$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин жазгыла.

Мында, $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3a\sin^2t\cos t}{-3a\cos^2t\sin t}=-tg\,t;\quad y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1.$

$$t_0=\frac{\pi}{4}\ \text{тө}\ x_0=\frac{a}{2\sqrt{2}},\quad y_0=\frac{a}{2\sqrt{2}}$$

болгондуктан, жаныманын теңдемеси: $y-\frac{a}{2\sqrt{2}}=-\left(x-\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ же $y+x-\frac{a}{\sqrt{2}}=0$ болот.

Фукциянын туундусу жөнүдөгү жогоруда айтылгандарды жыйынтыктап бир таблицага түшүрүп жазууга болот. Таблицадагы даяр формулалардан пайдаланып, ар кандай элементардык функциянын туундусун эсептеп чыгуу мүмкүн. Элементардык функциялардын мындай туундуларын ар кандай маселелерди чыгарууда даяр түрдө колдонууга ыңгайлуу шарт түзүлөт. Ошондуктан туундуга байланыштуу болгон төмөнкү негизги формулаларды эстеп калган жакшы.

I. Тууду алуунун негизги эрежелери:

$(\sqrt{x})'_x=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

1. $(c)'=0$, c - cont
2. $(u+v-w)'=u'+v'-w'$
3. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

II. Функциялардын туундулары:

1. $(x^n)'=nx^{n-1}$
2. $(a^x)'=a^x\ln a$, $(a>0)$
3. $(e^x)'=e^x$

4. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

5. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $(a>0,\ a\neq 1)$

6. $(\sin x)' = \cos x$

7. $(\cos x)' = -\sin x$

8. $\left(\mathrm{tg}x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9. $\left(\mathrm{ctg}x\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

10. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $\left(\mathrm{arctg}x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13. $\left(\mathrm{arcctg}x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

14. $\left(\lg x\right)' = \dfrac{0{,}4343}{x}$

§ 12. Дифференциалдын түшүнүгү, геометриялык мааниси, түрүнүн инварианттуулугу

$f(x)$ функциясы x чекитинде $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ туундусуна ээ болсун, б. а. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$ же $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$ барабардыгы аткарылсын, мында α чексиз кичирейүүчү чоңдук. Мында функциянын өсүндүсү эки кошулуучу түрүндө жазылды, анын биринчиси Δx ке түз пропорциялаш, ага карата башкы (сызыктуу) бөлүгү болот, экинчиси, б. а. $\alpha\cdot\Delta x$ көбөйтүндүсү Δx ке караганда жогорку тартиптеги чексиз кичирейүүчү болот.

Аныктама. *Функциянын Δy өсүндүсүнүн башкы (сызыктуу) бөлүгү ал функциянын дифференциалы деп аталат да:*

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x \tag{1}$$

аркылуу белгиленет. **Анда функциянын Δy өсүндүсүн:**

$$\Delta y=dy+\alpha\cdot\Delta x \tag{2}$$

түрүндө жазууга болот. Мындагы $\alpha\cdot\Delta x$ нөлгө Δx тен тез умтул-

гандыктан, $\Delta y \approx dy$ деп дагы коюшат. $\Delta x = dx$ деп белгилеп, аны көз каранды эмес өзгөрмөнүн дифференциалы дешет, анда (1):

$$dy = f'(x) \cdot dx \qquad (1\text{ a})$$

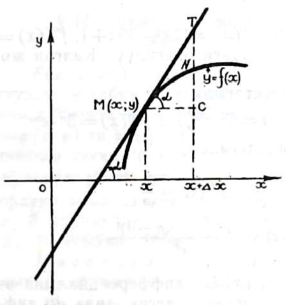
түрүндө жазылат, мындан $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. (3)

Демек, функциянын туундусун функциянын дифференциалынын аргументтин дифференциалына болгон катышы деп кароого болот.

Мисалдар. 1. $f(x) = \ln(1-x) \cdot e^{2x}$ функциясынын дифференциалын тапкыла.

Мында $df(x) = \left[-\frac{2x}{1-x} + 2(1-x) \cdot e^{2x}\right]dx$ дифференциалына ээ болобуз

2. $f(x) = \sin 5x - \operatorname{arctg} 2x$ тин дифференциалын жазгыла. Бул сапар: $df(x) = \left(5\cos 5x - \frac{2}{1+4x^2}\right)dx$ дифференциалы табылат.



62-чийме

Дифференциалдын геометриялык маанисин көрсөтүү үчүн $y = f(x)$ функциясынын графигинен $M(x, y)$ чекитин алып, ошол чекитте ийри сызыкка жаныма жүргүзөбүз, ал OX огу менен α бурчун түзсүн, мында $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ белгилүү. Эми x ке Δx өсүндүсүн берип, ага туура келген Δy өсүндүсүн CN аркылуу белгилейбиз. MT жанымасы менен CN дин кесилишкен чекитин T аркылуу белгилейбиз. Мындагы MCT үч бурчтугунан $CT = MC \times \times tg\alpha = f'(x) \cdot \Delta x$ экендигин байкайбыз (62-чийме), анткени $MC = \Delta x$, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Ошентип, $CT = dy$ болот, б. а. *функциянын дифференциалы геометриялык жактан жаныманын ординатасынын өсүндүсүн туюнтат,* функциянын $CN = \Delta y$ өсүндүсү, ийри сызыктын ординатасынын өсүндүсүн туюнтат.

Эми $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ татаал функциясы берилсин, анын туундусу $y'_x = f'(u) \cdot u'_x$ аркылуу эсептелери белгилүү.

Дифференциалдын (1) аныктамасы боюнча

$$dy = y'_x dx = f'(u) \cdot u'_x dx = f'(u) \cdot du, \text{ б. а. } dy = f'(u) \cdot du$$

экендиги белгилүү. Муну (1′) менен салыштырып, эгер x тин ордуна андан функция болгон $u = \varphi(x)$ функциясын койсок, дифференциалдын сырткы формасы бузулбастан сакталарын көрдүк. Дифференциалдын бул касиети, анын *инварианттуулук* касиети деп аталат.

§ 13. Жогорку тартиптеги туундулар жана дифференциалдар

$f(x)$ функциясынын $y'=f'(x)$ туундусу өз кезегинде x тен функция болушу ыктымал. Эгер $f'(x)$ да дифференцирленүүчү болсо, анда аны $y''=f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2}$ аркылуу белгилеп:

$$y''=f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

аны $f(x)$ функциясынын *экинчи туундусу* деп аташат.

$f(x)$ тин n- туундусу деп, анын $(n-1)$-туундусунун туундусун айтышат; ал $y^{(n)}$ аркылуу белгиленет:

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'=\frac{d^ny}{dx^n}. \quad (2)$$

Мисалдар. 1. $f(x)=x^4-5x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+1$ функциясынын бешинчи туундусун тапкыла.

Мында, $f'(x)=4x^3-15x^2+x-6$; $f''(x)=12x^2-30x+1$, $f'''(x)=$ $=24x-30$; $f^{(IV)}(x)=24$; $f^{(V)}(x)=0$ экендиги белгилүү. Калган жогорку туундулары дагы нөл болот.

2. $f(x)=e^{5x}$ тин n-туундусун аныктагыла.

$f'(x)=5e^{5x}$; $f''(x)=5^2\cdot e^{5x}$, $f'''(x)=5^3\cdot e^{5x},\ldots,f^{(n)}(x)=5^n\cdot e^{5x}$.

3. $f(x)=\ln x$ тин n-туундусун эсептегиле.

Мында, $f'(x)=\frac{1}{x}$; $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$; $f'''(x)=\frac{2!}{x^3}$

$$f^{IV}(x)=-\frac{3!}{x^4},\ldots,f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Эми $y=f(x)$ функциясы $dy=f'(x)dx$ дифференциалына ээ болсун. Эгер $dx=\Delta x$ тин мааниси өзгөрбөсүн десек, анда dy дифференциалы x көз каранды эмес өзгөрмөдөн гана функция болот.

dy дифференциалынын дифференциалы $y=f(x)$ тин экинчи тартиптеги дифференциалы деп аталат да, d^2y аркылуу белгиленет. Ошентип, аныктама боюнча

$$d^2y=d(dy)=(dy)'\cdot dx=[f'(x)dx]'\cdot dx=f''(x)\cdot dx^2 \quad (3)$$

экендигине ээ болобуз.

$y=f(x)$ функциясынын n-тартиптеги дифференциалы деп, анын $(n-1)$-дифференциалынын дифференциалын айтышат да, аны d^ny аркылуу белгилешет. Ал

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=[f^{(n-1)}(x)\cdot dx^{n-1}]'dx=f^n(x)\cdot dx^n \quad (4)$$

болорун байкайбыз.

Мисал. $y=e^{3x}\cdot\left(x^2-5x+\frac{1}{2}\right)$ функциясынын төртүнчү тартиптеги дифференциалын аныктагыла.

$$y' = 3e^{3x}\left(x^2 - 5x + \frac{1}{2}\right) + e^{3x}\cdot(2x - 5),$$

$$y'' = 3^2\cdot e^{3x}\left(x^2 - 5x + \frac{1}{2}\right) + 6e^{3x}(2x-5) + 2e^{3x},$$

$$y''' = 3^3\cdot e^{3x}\left(x^2 - 5x + \frac{1}{2}\right) + 27e^{3x}(2x-5) + 18e^{3x},$$

$$y^{IV} = 3^4\cdot e^{3x}\left(x^2 - 5x + \frac{1}{2}\right) + 108e^{3x}(2x-5) + 108e^{3x},$$

Демек,

$$d^4y = y^{(IV)}dx^4 = \left[81e^{3x}\left(x^2 - 5x + \frac{1}{2}\right) + 108e^{3x}(2x-5) + 108\cdot e^{3x}\right]dx^4,$$

$$d^4y = 27e^{3x}\left(3x^2 - 7x - \frac{29}{2}\right)dx^4.$$

§ 14. Айкын эмес жана параметрдик функциялардын жогорку тартиптеги туундулары

$F(x, y)=0$ аркылуу берилген айкын эмес y функциясынын туундусун табуу үчүн y тин x тен функция экендигин эске алып, аны x боюнча дифференцирлеп, $\varphi\ (x, y, y')=0$ теңдемесинен $y'_x = \varphi(x, y)$ ти аныктоо керектигин билебиз. Эгер $F(x, y)$ экинчи тартиптеги туундуга ээ болсо, анда y''_{x^2} экинчи туундуну табуу үчүн $y'_x = \varphi(x, y)$ ти дагы бир жолу x боюнча дифференцирлеп, y'_x тин ордуна анын өз маанисин коюп чыгыш керек. Үчүнчү, төртүнчү ж. б. туундулары ушул сыяктуу эле удаалаш дифференцирлеп, y'_x ти коюудан табылат.

Мисалдар. 1. $x^2+xy+y^2-a^2=0$ айкын эмес функциясынын y''_x туундусун тапкыла.

Мында $2x+y+x\cdot y'_x+2y\cdot y'_x=0$ болгондуктан, $y'_x = -\dfrac{y+2x}{x+2y}$.

Эми аны x боюнча дагы бир ирет дифференцирлейбиз:

$$y''_{x^2} = -\frac{(x+2y)\cdot\left(y'_x+2\right) - (y+2x)\cdot\left(1+2\cdot y'_x\right)}{(x+2y)^2}.$$

Алымындагы y'_x тин ордуна өз маанисин коюп, жөнөкөйлөтүп,

$x^2+xy+y^2=a^2$ экендигин эске алсак, акыры $y''_{x^2} = -\dfrac{6a^2}{(x-2y^3)}$ экинчи тартиптеги туундуга ээ болобуз.

2. $x^3+y^3-3axy=0$ айкын эмес функциясынын y''_x туундусун тапкыла.

Бул сапар $3x^2+3y^2\cdot y'_x - 3ay - 3ax\cdot y'_x = 0$ дөн $y'_x = \dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$ экендигин табабыз. Аны x боюнча дифференцирлеп:

$$y''_{x^2}=\frac{(y^2-ax)(a\cdot y'_x-2x)-(ay-x^2)\cdot(2y\cdot y'_x-a)}{(y^2-ax)^2}$$

туундусуна ээ болобуз. Алымына катышкан y'_x тин маанисин коюп, кашааларды орток бөлүмгө келтирип, жөнөкөйлөтүп, топтоп жана $x^3+y^3-3axy=0$ экендигин эске алып, акырында $y''_{x^2}=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$ туундусуна ээ болобуз.

Эми $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ параметрдик түрдө берилген функциянын жогорку тартиптеги туундуларын табууга токтолобуз. Ал функциянын биринчи туундусу $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$ аркылуу табыларын билебиз. Экинчи тартиптеги туундусун табуу үчүн ушул биринчи туундунун эки жагын тең x боюнча дифференцирлейбиз:

$$y''_{x^2}=\frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{x'_t\cdot y''_{t^2}-y'_t\cdot x''_{t^2}}{(x'_t)^2}\cdot\frac{dt}{dx}.$$

Мында акыркы $\frac{dt}{dx}$ ти $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{x'_t}$ деп жазууга болгондуктан, экинчи туунду үчүн акыры:

$$y''_{x^2}=\frac{x'_t\cdot y''_{t^2}-y'_t\cdot x''_{t^2}}{(x'_t)^2} \qquad (*)$$

формулага ээ болобуз.

Ошентип, жогорку тартиптеги туундулар:

$$y''_{x^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\quad y'''_{x^3}=\frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t},\ \ldots,\quad y^{(n)}_{x^n}=\frac{(y^{(n-1)})'_t}{x'_t} \qquad (*a)$$

боюнча аныкталат.

М и с а л д а р. 1. $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{t}, \\ y=\sqrt{t-t^2} \end{cases}$ параметрдик функциясынын y''_{x^2} туундусун тапкыла.

Мында $y'_t=\frac{1-2t}{2\sqrt{t-t^2}}$, $x'_t=-\frac{1}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}=-\frac{1}{2\sqrt{t-t^2}}$.

Демек, $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=2t-1$.

Ал эми $y''_{x^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ болгондуктан, $y''_{x^2}=\frac{2}{-\frac{1}{2\sqrt{t-t^2}}}=-4\sqrt{t-t^2}$

туундусу келип чыгат.

2. $\begin{cases} y=\operatorname{arctg} t, \\ x=\ln(1+t^2)+\frac{t^2}{2} \end{cases}$ ден y''_{x^2} ти тапкыла.

Мында $y'_t=\frac{1}{1+t^2}$, $x'_t=\frac{2t}{1+t^2}+t=\frac{3t+t^3}{1+t^2}$ болгондуктан, $y'_x=\frac{1}{3t+t^3}$ болот. Эми $(y'_x)'_t=-\frac{3+3t^2}{(3t+t^3)^2}=-\frac{3(1+t^2)}{(3t+t^3)^2}$, $x'_t=\frac{3t+t^3}{1+t^2}$ болгондуктан, $y''_{x^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ боюнча акырында $y''_{x^2}=-\frac{3(1+t^2)^2}{(3t+t^3)^3}$ туундусуна ээ болобуз.

IX глава. ТУУНДУНУ ФУНКЦИЯНЫ ИЗИЛДӨӨГӨ КОЛДОНУУ

§ 1. Роллдун жана Лагранждын теоремалары.

1. Роллдун теоремасы. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болуп, аңын бардык ички чекиттеринде туундуга ээ болсо жана ал сегменттин учтарында барабар маанилерге ээ, б. а.* $f(a)=f(b)$ болсо, анда $[a, b]$ сегментинин ичинен $f'(x)$ *туундусу нөлгө барабар боло турган жок дегенде бир чекит* $x=x_0$ $(a<x_0<b)$ табылат, б. а. $f'(x_0)=0$ болот.

Д а л и л д ө ө. Эки учурду карайбыз.

а) $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментинде турактуу болсун, анда x_0 үчүн $[a, b]$ сегментинин ичиндеги каалагандай ички чекитти алууга болот да, теорема далилденет.

б) $f(x)$ турактуу болбосун. Анда $f(a)=f(b)$ болгондуктан $f(x)$ функциясы өзүнүн эң чоң же эң кичине маанисине $[a, b]$ сегментинин ички чекиттеринде гана жетише алат. x_0 ички чекитинде $f(x)$ эң кичине мааниге жетишсин дейлик, б. а. $f(x_0)<f(x)$, $a<x_0<b$ болсун. Ошондуктан $\Delta x>0$ кезинде:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\geqslant 0$$

жана

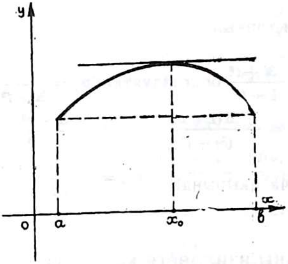
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0)\leqslant 0.$$

Бул экөөнөн $f(x_0)=0$ экендиги келип чыгат. Роллдун теоремасы далилденди.

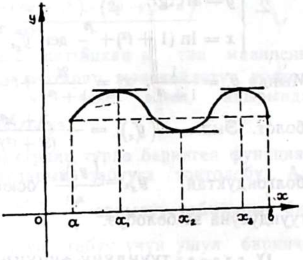
Геометриялык жактан алганда, a жана b нын арасынан графиктин $M_0(x_0, f(x_0))$ чекитине жүргүзүлгөн жаныма OX огуна параллель боло турган жок дегенде бир x_0 чекити табыларын көрсөтөт. Иш жүзүндө мында чекиттерден бир нечеси болушу ыктымал (63-жана 64-чиймелер).

2. Лагранждын теоремасы. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болуп аның бардык ички чекиттеринде $f'(x)$ туундуларына ээ болсо, анда a менен b нын арасынан:*

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(x_0) \tag{1}$$



63-чийме



64-чийме

барабардыгы аткарыла турган, жок дегенде бир x_0 чекити табылат.

Далилдөө.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2}$$

жардамчы функцияны алабыз. Бул функция Роллдун теоремасынын бардык шартын канааттандырат. Чынында $[a, b]$ сегментинде ал үзгүлтүксүз, анткени ал $f(x)$ жана $x-a$ үзгүлтүксүз функциялардын сызыктуу комбинациясынан түзүлгөн, экинчиден:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3}$$

чектүү туундуга ээ, үчүнчүдөн $F(a) = F(b) = 0$. Ошондуктан $F(x)$ ке Роллдун теоремасын колдонууга болот, б. а. $F'(x_0) = 0$ боло турган $a < x_0 < b$ жок дегенде бир x_0 чекити табылат, анда (3) боюнча:

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

аткарылат, бул (1) барабардыктын өзү. Ушуну менен Лагранждын теоремасы далилденди.

Роллдун теоремасы Лагранждын теоремасынын айрым учуру, анткени $f(a) = f(b)$ болсо, $f'(x_0) = 0$ келип чыгат.

Геометриялык жактан алганда Лангранждын теоремасы $f(x)$ тин графигинен ага жүргүзгөн жаныма, $A(a, f(a))$ жана $B(b, f(b))$ чекиттерин бириктире турган AB кесиндисине параллель боло турган жок дегенде бир $M_0(x_0, f(x_0))$ чекити табыларын көрсөтөт.

(1) формула чектүү өсүндү жөнүндөгү Лагранждын формуласы деп аталат.

Эгер $0 < \theta < 1$ болуп, θ кандайдыр бир оң дурус бөлчөк болсо, анда $x_0 = a + \theta(b - a)$ чекити үчүн $a < x_0 < b$ орундаларын байкоо кыйын эмес. Ошондуктан Лагранждын (1) формуласын;

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'[a+\theta(b-a)],\ (0<\theta<1) \tag{1a}$$

түрүндө да жазууга болот.

Эгер $a=x$, $b=x+\Delta x$. десек, $b-a=\Delta x$ болуп, Лагранждын формуласы

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x\cdot f'(x+\theta\Delta x) \tag{1б}$$

түрүндө жазылат.

§ 2. Лопиталдын эрежелери

$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ түрүндөгү бөлчөктүү туюнтманын $x\to a$ кездеги пределин аныктоодо, бул эки функция тең бир мезгилде 0 гө же ∞ ге умтулуп калышы ыктымал. Бул учурларда $\frac{0}{0}$ же $\frac{\infty}{\infty}$ аныксыздыгына учурайбыз. Мындай аныксыздыктарды ачуу үчүн $\varphi'(x)$ жана $\psi'(x)$ туундуларынан пайдаланууга туура келет. Мындай аныксыздыктарды биринчи болуп, француз математиги Лопиталь ачкан.

Теорема. *Чексиз кичирейүүчү же чексиз чоңоюучу эки функциянын катышынын предели, алардын туундуларынын катышынын пределине барабар, б. а.*

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}, \tag{1}$$

мында оң жакқы предел бар деп эсептелет.

Д а л и л д ө ө. $\varphi(x)$ жана $\psi(x)$ функциялары $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ үзгүлтүксүз туундуларга ээ болсун.

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)=0,\quad \lim_{x\to a}\psi(x)=\psi(a)=0 \tag{2}$$

болсун. Мындагы $\varphi(x)-\psi(x)$ айырмасын $\varphi(x)$ функциясынын $x=a$ чекитиндеги $\Delta x=x-a$ га туура келген өсүндүсү деп кароого болот. Ошондуктан,

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}. \tag{3}$$

Ушул сыяктуу эле,

$$\psi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}\neq 0 \tag{4}$$

болору ачык. Демек,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}{\dfrac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}}. \tag{5}$$

Эгер (5) те $x\to a$ да пределге өтүп, (3), (4) тү эске алсак,

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \tag{6}$$

болору белгилүү. Шарт боюнча $\varphi'(x)$ жана $\psi'(x)$ үзгүлтүксүз болуп, жана $\psi'(a)\neq 0$ болгондуктан,

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\varphi'(x)}{\lim\limits_{x\to a}\psi'(x)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \tag{7}$$

экендигине ээ болобуз. (6) менен (7) нин оң жактары барабар болгондуктан алардын сол жактары дагы барабар болуп (1) барабардык орундалат. Ушуну менен теорема $\frac{0}{0}$ учуру үчүн далилденди. $\frac{\infty}{\infty}$ учурун далилдөөгө токтолбойбуз, анын далилдөөсү математикалык анализдин толугураак курстарында берилген.

Эскертүү. Эгер $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}$ бөлчөгү дагы $\frac{0}{0}$ же $\frac{\infty}{\infty}$ аныксыздыгына келсе, анда Лопиталдын эрежесин кайрадан колдонуу керек.

Мисалдар. 1.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\alpha x}{1-\cos\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\cdot\sin\alpha x}{\beta\cdot\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^2\cdot\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\beta^2\cdot\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=$$

$$=\frac{\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{\beta\to 0}\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cos^2 x\cdot(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=3.$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

4. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3}{3\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3$$

5. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ пределин тапкыла.

Аны төмөнкүчө чыгарабыз:

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\pi-x}}=\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{(\pi-x)^2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{(\pi-x)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2(\pi-x)}{2\cdot 2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{2(\pi-x)}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2}{\cos x}=2.$$

$$6.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots$$

Алымынан жана бөлүмүнөн өз алдынча туунду алууну улантканда алымынын n-туундусу турактуу сан болуп, бөлүмүнүкү e^x бойдон калат, демек $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ болот.

§ 3. Функциянын өсүшү жана кемиши

Монотондуу өсүүчү жана кемүүчү функциялардын аныктамасын билебиз, алсак (a, b) интервалынын каалагандай $x_1<x_2$ эки чекити үчүн $f(x_1)<f(x_2)$ болсо, функция өсүүчү болуп, ал эми $f(x_1)>f(x_2)$ болсо, кемүүчү болору белгилүү.

1-теорема. *Эгерде дифференцирленүүчү функция кандайдыр бир интервалда өсүүчү (кемүүчү) функция болсо, анда анын туундусу ал интервалда терс (оң) болбойт.*

Бул теорема, функциянын *өсүшүнүн (кемишинин) зарыл шартын* туюнтат

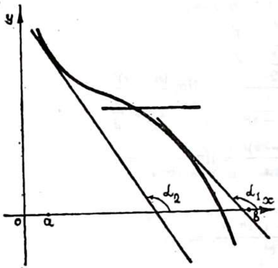
Д а л и л д ө ө. $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында кемүүчү функция болсун. Туундунун аныктамасы боюнча

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

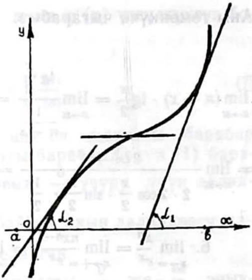
экендигин билебиз. x жана $x+\Delta x$ чекиттери (a, b) да жатканда, $f(x)$ кемүүчү функция болгондуктан (1) деги бөлчөктүн алымындагы өсүндүнүн белгиси дайыма Δx тин белгисине карама-каршы болот. Ошондуктан дайыма $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<0$ болот. Пределге өткөндө буга барабардык белги да кошулушу ыктымал, демек дайыма $f'(x)\leqslant 0$ болот, б. а. оң болбойт.

Өсүүчү функция үчүн теорема ушул сыяктуу эле далилденет.

Кемүүчү дифференцирленүүчү функциянын графигине жүргүзүлгөн жанымалар OX огунун оң багыты менен кең бурчту түзөт, кээ бир чекиттерде Δx ке параллель болот. (65-чийме), өсүүчү функция учурунда тар бурчту түзүп, кээ бирлери Δx ке параллель болот (66-чийме).



65-чийме



66-чийме

***2-теорема.** Эгерде дифференцирленүүчү функциянын кандайдыр бир интервалдагы туундусу оң (терс) болсо, анда функция бул интервалда өсүүчү (кемүүчү) болот.* Бул теорема функциянын өсүшүнүн (кемишинин) жетиштүү шартын туюнтат.

Далилдөө. $f(x)$ функциясынын (a, b) интервалындагы туундусу оң болсун: $f'(x)>0$. Аргументтин (a, b) интервалындагы каалагандай $x_1<x_2$ эки мааниси үчүн, чектүү өсүндү жөнүндө Лагранждын теоремасы боюнча:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\cdot f'(\xi) \qquad (2)$$

$x_1<\xi<x_2$ орундалары белгилүү, мында $a<\xi<b$ экендиги ачык. Шарт боюнча $x_2-x_1>0$ жана $f'(\xi)>0$ болгондуктан, (2) ден: $f(x_2)-f(x_1)>0$ же $f(x_2)>f(x_1)$ экендиги келип чыгат. Демек, $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында өсүүчү функция болот. Эгер $f'(x)<0$ болсо, анын (a, b) интервалында кемүүчү функция болору ушул сыяктуу эле далилденет. Бул сапар $x_2-x_1>0$, бирок $f'(\xi)<0$ болуп, (2) ден $f(x_1)>f(x_2)$ экендиги келип чыгат, ушуну менен теорема толук далилденди.

Мисалдар. 1. $y=4x-x^2$ функциясынын өсүүчү жана кемүүчү аралыктарын аныктагыла.

Мында $y'=4-2x=2(2-x)$. Ошондуктан $2-x>0$, б. а. $x<2$ кезинде берилген функция өсүүчү, ал эми $2-x<0$, б. а. $x>2$ кезинде функция кемүүчү болот.

2. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$ функциясынын өсүүчү жана кемүүчү аралыктарын аныктагыла.

Бул сапар $f'(x)=x^2-2x-3$. Аны нөлгө барабарлап, квадраттык теңдемени чыгарып, $x_{1,2}=1\pm2$ болорун, б. а. $x_1=-1$ жана $x_2=3$ чекиттеринде функциянын туундусу нөлгө айланарын көрөбүз. Бул чекиттер бүткүл сандык окту $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ жана $(3, +\infty)$ интервалдарына бөлөт. Эми $f'(x)$ туундусунун ушул интервалдардагы белгисин аныктайбыз.

$f'(x)=(x+1)(x-3)$ болгондуктан $x<-1$ болгондо, б. а. $(-\infty, -1)$ интервалында $f'(x)>0$ болуп, $f(x)$ өсүүчү болот. $-1<x<3$ кезинде, б. а. $(-1, 3)$ интервалында $f'(x)<0$ болуп $f(x)$ кемүүчү функция болот. Ал эми $x>+3$ кезинде, б. а. $(3, +\infty)$ интервалында $f'(x)>0$ болуп, $f(x)$ өсүүчү болот.

$f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x=0$ теңдемесин чыгарып, $f(x)$ функциясы OX огун $x_1=0$ жана $x_{2,3}=1{,}5\pm 3{,}3$, б. а. $x_2=-1{,}8$; $x_3=4{,}8$ чекиттеринде кесип өтөрүн аныктасак, жогоруда айтылгандарга толук ынанабыз.

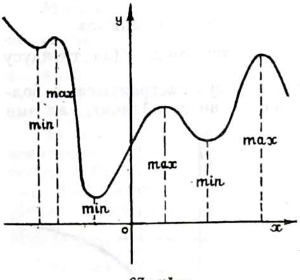
§ 4. Функциянын экстремумдары

Аныктама. *Эгер x_0 чекитинин кандайдыр бир $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ аймагындагы бардык x үчүн $(x\neq x_0)$:*

$$f(x)\leqslant f(x_0) \quad [f(x)\geqslant f(x_0)] \tag{1}$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда $f(x)$ функциясы $x=x_0$ чекитинде максимумга (минимумга) ээ болот деп айтышат.

Эгер (1) де $<$ $(>)$ гана белги калып, барабардык белги болбосо, анда x_0 чекитинде $f(x)$ функциясын *өздүк максимумга (өздүк минимумга)* ээ болот деп аташат (67-чийме). Функциянын максимум же минимуму анын экстремуму деп аталат, ага жетишкен x_0 чекити экстремумдун чекити деп аталат.



67-чийме

Эгер $f(x_0)$ функциясы x_1 жана x_2 чекиттеринде максимумга ээ болсо, анда Вейерштрасстын теоремасы боюнча алардын арасындагы кандайдыр бир x_0 чекитинде ал функция сөзсүз минимумга ээ болот, ошол сыяктуу эле удаалаш эки минимумдун арасында бир максимум бар болот. Экстремумдар жергиликтүү гана мааниге ээ болот, ошондуктан бир чекиттеги минимум экинчи бир чекиттеги максимумдан чоң болуп калышы да ыктымал (67-чийме).

Экстремумдун зарыл шарты. Эгер $f(x)$ функциясы $x=x_0$ чекитинде экстремумга ээ болсо, анда Ролдун теоремасы боюнча $f'(x_0)=0$ болору белгилүү. Демек, $f'(x_0)=0$ болушу функциянын экстремумга ээ болушунун зарыл шарты болуп саналат. $f'(x_0)=0$ орундалуучу x_0 чекиттери *стационардык чекиттер* деп аталат.

Мисал, $f(x)=2x-x^2$ функциясынын биринчи туундусу: $f'(x)=2-2x$ болгондуктан, $2-2x=0$ теңдемесинен $x_0=1$ табылат. Демек, $x_0=1$ чекити стационардык чекит болот. Бул чекитте

$f(1)=1$ болуп, функция максимум мааниге ээ болот, анткени $x\neq 1$ болгон калган чекиттердеги $f(x)$ тин маанилери 1 ден кичине экендиги көрүнүп турат.

Бардык эле стационардык чекиттерде функция экстремумга ээ боло бербейт. Алсак $f(x)=(x-1)^3$ функциясы үчүн $f'(x)=3(x-1)^2$. Аны нөлгө барабарлап $x_0=1$ стационардык чекитин табабыз. Бирок бул чекитте берилген функция экстремумга ээ болбойт, анткени $f(1)=0$, ал эми $x<1$ болсо $f(x)$ терс мааниге, $x>1$ болсо, оң мааниге ээ болуп, $f(1)=0$ мааниси максимум дагы, минимум дагы болбойт.

Ошентип, $f'(x_0)=0$ болушу экстремумдун зарыл гана шарты болуп, жетиштүү шарты боло албайт. Экинчи жактан функция экстремумга, өзү чектүү туундуга ээ болбогон чекитте дагы жетишип калышы ыктымал.

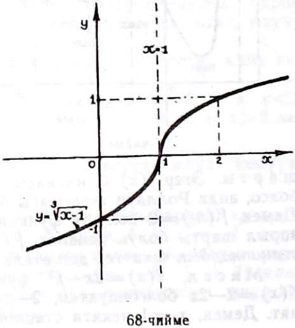
$f'(x_0)=0$ же $f'(x_0)$ жок болгон чекиттер экстремумдун *«шектүү»* чекиттери деп аталат, анткени мындай чекиттердин бардыгында эле функция экстремумга ээ боло бербейт, бирок айрымдарында экстремум болот. Ошондуктан ар бир шектүү чекитти өз алдынча изилдөө керек.

Мисалдар. 1. $f(x)=1-|x|$ функциясынын экстремумун аныктагыла.

$x_0=0$ чекитинде бул функциянын туундуга ээ болбосун көргөн элек (60-чийме). Бирок ал $x_0=0$ чекитинде берилген функция максимумга ээ болот, анткени $x\neq 0$ каалагандай чекитте $f(x)$ тин мааниси 1 ден кичине.

2. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ функциясынын экстремумун тапкыла.

Мында $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ болуп, $x_0=1$ чекитинде $f'(x)$ туундусу чектүү эмес, бирок $x_0=1$ чекитинде функция экстремумга ээ болбойт, анткени $x_0=1$ чекитинде функция нөлгө айланат, ал эми $x<1$ кезинде анын мааниси терс, $x>1$ кезинде анын маанаси оң болот (68-чийме).



68-чийме

Экстремумдун жетиштүү шарттары.

1-теорема. *(биринчи эреже). Эгер x_0 чекити $f(x)$ тин шектүү чекити болсо жана x_0 дун сол жагынан оң жагына өткөндө $f^1(x)$ белгисин өзгөртсө, анда $f(x_0)$ саны $f(x)$ функциясынын экстремуму болот, мында:*

1) Эгер $f'(x)$ тин белгиси оңдон терске өзгөрсө, анда $f(x)$ функциясы $x=x_0$ чекитинде максимумга ээ болот;

2) Эгер $f'(x)$ тин белгиси терстен оңго өзгөрсө, анда $f(x)$ функциясы *$x=x_0$ чекитинде минимумга ээ болот.*

Ушул теореманын шарты аткарылганда, $f(x)$ сөзсүз экстремумга ээ болот, ошондуктан ал *экстремумдун жетиштүү шарты* болуп саналат

Теореманын биринчи бөлүгүн далилдейбиз. $f'(x)=0$ болуп, бирок $x_0-\varepsilon<x<x_0$ кезинде $f'(x)>0$, ал эми $x_0<x<x_0+\varepsilon$ кезинде $f'(x)<0$ болсун, мында $\varepsilon>0$ каалагандай кичине сан. Демек, § 3 тагы 2-теорема боюнча $f(x)$ функциясы $(x_0-\varepsilon, x_0)$ интервалында өсүүчү функция болуп, ал эми $(x_0, x_0+\varepsilon)$ интервалында кемүүчү болот. Ошондуктан x_0 го эң жакын чекиттерде $x<x_0$ болсо, $f(x)<<f(x_0)$, ал эми $x>x_0$ болсо, $f(x_0)>f(x)$ орундалат, б. а. $x=x_0$ чекитинде $f(x)$ функциясы максимумга ээ болот.

Теореманын экинчи бөлүмү дале ушул сыяктуу далилденет.

2-теорема. *Эгер $f'(x_0)=0$ болуп, бирок x_0 аркылуу солдон оңго өткөндө $f'(x)$ туундусу белгисин өзгөртпөсө, анда $x=x_0$ чекитинде $f(x)$ функциясы экстремумга ээ болбойт.*

Далилдөө. Шарт боюнча $f'(x_0)=0$ жана $x\neq x_0$ болуп, $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ кезинде, $f'(x)>0$ болсун. Анда алиги § 3 тагы 2-теорема боюнча $f(x)$ функциясы бүткүл $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ интервалында өсүүчү болуп, x_0 чекитинде экстремумга ээ болбойт. $f'(x)<0$ болсо, ал интервалда кемүүчү функция болуп, баары бир x_0 чекитинде экстремумга ээ болмок эмес. Ушуну менен теорема далилденди.

Мисал. $f(x)=4x-\dfrac{x^3}{3}$ функциясынын экстремумдарын аныктагыла.

Мында $f'(x)=4-x^2$ болгондуктан, аны нөлгө барабарлап: $4-x^2=0$, $x_1=-2$, $x_2=2$ стационардык чекиттерди табабыз. Эң кичине $h>0$ санын алып, бул эки шектүү чекиттин ар бирин өзүнчө изилдейбиз.

а) $x_0=-2$ чекитин карайлы. $f'(x)=4-x^2$ туундусунун $x_0=-2$ чекитинин сол жагындагы жана оң жагындагы маанилерин эсептейбиз: $f'(-2-h)=4-(-2-h)^2=-4h-h^2<0$, $f'(-2+h)=4-(-2+h)^2=4h-h^2>0$.

Демек, берилген функция $x_0=-2$ чекитинде минимумга ээ болот. Мында $y_{min}=4\cdot(-2)-\dfrac{(-2)^3}{3}=-8+\dfrac{8}{3}=-\dfrac{16}{3}$ экендиги ачык.

б) Эми $x_0=2$ чекитине келелик. Бул сапар: $f'(2-h)=4-(2-h)^2=4h+h^2>0$, ал эми $f'(2+h)=4-(2+h)^2=-4h-h^2<0$ болгондуктан, берилген функция $x_0=2$ чекитинде максимумга ээ болот. Ал максимум маани: $y_{max}=4\cdot 2-\dfrac{2^3}{3}=8-\dfrac{8}{3}=\dfrac{16}{3}$ болот.

Ал функциянын графиги менен OX огунун кесилишкен чекиттерин табуу үчүн $f(x)=4x-\dfrac{x^3}{3}=0$ теңдемесин чыгаруу керек. Ал график $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2\sqrt{3}$ чекиттеринде OX огун кесип өтөт.

3-теорема (экинчи эреже). *Эгер x_0 чекити $f(x)$ тин шектүү чекити болуп, ал чекиттеги экинчи туундусу нөлдөн айырмалуу* *болсо, б. а.* $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ болсо, анда *$f(x)$ функциясы x_0 чекитинде экстремумга ээ болот, атап айтканда: эгер* $f''(x_0)>0$ болсо минимумга, ал эми $f''(x_0)<0$ болсо, максимумга ээ болот.

Д а л и л д ө ө. 1) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ болсун. Мында $f''(x_0)=(f'(x)'>0$ болгондуктан, x_0 чекитинин аймагында $f'(x)$ туундусу өсүүчү функция болот. Ал эми, $f'(x_0)=0$ болгондуктан, $f'(x)$ туундусу x_0 дун сол жагында терс, оң жагында оң мааниге ээ болот. Анда 1-теорема боюнча $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде минимумга ээ болот.

2) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$ болгондо, $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде максимумга ээ болору ушул сыяктуу эле далилденет.

М и с а л д а р. 1. $f(x)=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$ функциясынын экстремумдарын аныктагыла.

Эң мурда $f'(x)$ туундусун табабыз.

$$f'(x)=\frac{(x-3)(2x-6)-(x^2-6x+13)\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

Аны нөлгө барабарлап, $x^2-6x+5=0$ теңдемесинен $x_1=1$, $x_2=5$ шектүү чекиттерин табабыз, Эми экинчи туундуну издейбиз.

$$f''(x)=\frac{(x-3)^2\cdot(2x-6)-(x^2-6x+5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=$$

$$=\frac{(x-3)(2x-6)-2(x^2-6x+5)}{(x-3)^3}=\frac{8}{(x-3)^3}.$$

Бул экинчи туундунун $x_1=1$ жана $x_2=5$ чекиттериндеги маанилерин өз алдынча аныктайбыз.

а) $f''(1)=-1<0$, демек $x_1=-1$ чекитинде берилген функция максимумга ээ болот. Ал максимум $y_{\max}=-4$ кө барабар.

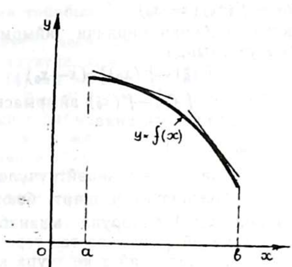
б) $f''(5)=1>0$, демек $x_2=5$ чекитинде ал функция минимумга ээ болот, ал $y_{\min}=4$ кө барабар.

2. $f(x)=x^2(1-x)$ функциясынын экстремумдарын аныктагыла.

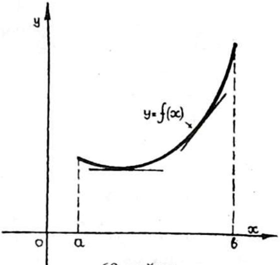
Бул сапар $f'(x)=2x(1-x)-x^2=2x-3x^2$. Ал эми $2x-3x^2=0$ теңдемесинен $x_1=0$ жана $x_2=\frac{2}{3}$ шектүү чекиттерин табабыз. $f''(x)=2-6x$ болгондуктан, $f''(0)=2>0$, демек $x_1=0$ чекитинде берилген функция минимумга ээ болот, ал $y_{\min}=0$ гө барабар. Ал эми $f''\left(\frac{2}{3}\right)=-2<0$ болгондуктан, $x_2=\frac{2}{3}$ чекитинде максимумга ээ болот, ал $y_{max}=\frac{4}{27}$ кө барабар.

§ 5. Ийместик жана томпоктук, ийреңдөө чекити

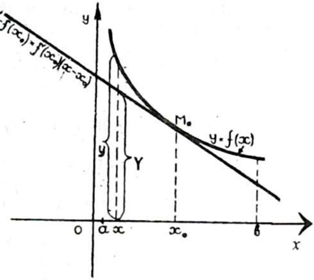
Аныктама. *Эгерде $y=f(x)$ ийри сызыгынын кандайдыр бир (a, b) интервалдагы бөлүгү, анын каалагандай $M(x, f(x))$ чекитинг жүргүзүлгөн бардык жанымаларынын жогору (төмөн) жагында жайгашса, анда ал ийри сызыктын (a, b) интервалындагы том-*



70-чийме



69-чийме



71-чийме

поктугу төмөн (жогору) карай багытталган деп аталат. Алсак, 69-чиймеде ийри сызыктын томпоктугу төмөн карай, 70-чиймеде томпоктугу жогору карай багытталган. Ал ийри сызыктарды (a, b) интервалында *жогору карай, (төмөн карай) ийилген* деп дагы айтышат. Томпоктугу жогору багытталган сызыкты жөн эле *томпок* деп, томпоктугу төмөн багытталганын *иймек* деп атоо кабыл алынган.

Теорема. *Эгерде $y=f(x)$ функциясынын $f''(x)$ экинчи туундусу (a, b) интервалында оң (терс) болсо, анда $y=f(x)$ тин графиги бул интервалда иймек (томпок) болот.*

Д а л и л д ө ө. (a, b) интервалынын бардык ички чекиттеринде $f''(x)>0$ болсун. Каалагандай $x_0 \in (a, b)$ чекитин алып, графикке $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде жаныма жүргүзөбүз, анын теңдемеси

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \tag{1}$$

болору белгилүү. $y=f(x)$ ийри сызыгынын каалагандай x чекитиндеги y ординатасы менен, ошол эле чекиттеги жаныманын Y ординатасынын айырмасын карап көрөлү (71-чийме). Мында

$$y-Y=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2)$$

болору белгилүү. Барабардыктан кийинки биринчи айырмага Лагранждын теоремасын колдонобуз. Мында

$$y-Y=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=[f'(\xi)-f'(x_0)]\cdot(x-x_0) \qquad (3)$$

$x_0<\xi<x$ болору белгилүү, Эми (3) дөгү $f'(\xi)-f'(x_0)$ айырмасына Лагранждын теоремасын кайрадан колдонобуз, анда

$$y-Y=f''(\overline{\xi})\cdot(\xi-x_0)(x-x_0) \qquad (4)$$

$x_0<\overline{\xi}<\xi$ болот. Мындагы $\xi-x_0$ жана $x-x_0$ көбөйтүүчүлөрүнүн экөө тең оң, ал эми $a<\overline{\xi}<b$ болгондуктан, шарт боюнча $f''(\overline{\xi})$ дагы оң. Ошондуктан (4) дөн $y>Y$ болоруна ынанабыз. Эгер $x<x_0$ болсо, анда (4) дөгү эки көбөйтүүчү экөө тең терс болуп, баары бир $y>Y$ келип чыкмак. Каалагандай x ке туура келген y жаныманын Y ординатасынан чоң болгондуктан, $y=f(x)$ ийри сызыгы $M_0(x_0, f(x_0))$ чекитиндеги жаныманын жогору жагында жатат. Демек, (a, b) интервалында ийри сызык иймек болот.

Эгер $f''(x)<0$ болсо, ийри сызык томпок болору ушул сыяктуу эле далилденет.

Мисалдар. 1. $f(x)=2-x^2$ функциясынын графиги дайыма томпок, анткени $f'(x)=-2x$, $f''(x)=-2<0$ болуп, экинчи туунду дайыма терс.

2. $f(x)=-x^3$ тун графигинин томпоктугун жана иймектигин аныктагыла.

Бул сапар $f'(x)=-3x^2$, $f''(x)=-6x$ болгондуктан, бардык $x<0$ үчүн $f''(x)>0$, демек $(-\infty, 0)$ интервалында график иймек. Ал эми бардык $x>0$ үчүн $f''(x)<0$, демек $(0, +\infty)$ интервалында график томпок.

Аныктама. *Ийри сызыктын иймек бөлүгү менен томпок бөлүгүн ажыратып турган чекит, анын* ийреңдөө *чекити деп аталат,* б. а. ийреңдөө чекити аркылуу өткөндө ийри сызык томпоктуктан иймектикке же тескерисинче иймектиктен томпоктукка өтөт.

Теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясынын $f''(x)$ экинчи туундусу x_0 чекитинде нөлгө айланса же табылбаса жана x_0 аркылуу солдон оңго өткөндө, $f''(x)$ туундусу белгисин өзгөртсө, анда $M_0(x_0, f(x_0))$ чекити, $f(x)$ тин графигинин ийреңдөө чекити болот.*

Далилдөө. $f''(x_0)=0$ болуп, x_0 аркылуу өткөндө $f''(x)$ туундусу белгисин оңдон терске өзгөртсүн. Демек, x_0 дун сол жагында $f''(x)>0$ болуп, $f(x)$ тин графиги иймек болот; x_0 дун оң жагында $f''(x)<0$, демек график томпок болот. Ошентип, $M_0(x_0, f(x_0))$ чекити аркылуу өткөндө, график иймектиктен томпоктукка өткөндүктөн, ал M_0 чекити графиктин ийреңдөө чекити болот. Теорема далилденди.

Мисалдар. 1. $f(x)=\frac{x^3}{6}-x^2$ ийри сызыгынын экстремумдарын, ийреңдөө чекитин аныктагыла.

$f'(x)=\frac{x^2}{2}-2x$ туундусун нөлгө барабарлап, шектүү чекиттерин табабыз. $\frac{x^2}{2} - 2x = 0$ же $x^2 - 4x = 0$ теңдемесинен $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ шектүү чекиттерине ээ болобуз. $f''(x) = x - 2$; $f''(0) = -2 < 0$ болгондуктан, $x_1 = 0$ чекитинде функция максимумга жетишет, ал эми $f''(4) = 2 > 0$ болгондуктан, $x_2 = 4$ чекитинде минимумга жетишет.

Эми $f''(x) = x - 2$ теңдемесинен ийреңдөө чекитинин абсциссасын табабыз, ал $x_0 = 2$ болору белгилүү. Ушул x_0 дун сол жагында жана оң жагында $f''(x)$ тин белгисин карап көрөлүк. Ал үчүн эң кичине $h > 0$ санын алалык. Мында $f''(x_0 - h) = (2 - h) - 2 = -h < 0$, ал эми $f''(x_0 + h) = (2 + h) - 2 = h > 0$ болуп, $x_0 = 2$ чекити аркылуу солдон оңго өткөндө, экинчи туунду белгисин терстен оңго өзгөртөт. Ал эми $f(x_0) = f(2) = \frac{8}{6} - 4 = -\frac{8}{3}$ болгондуктан, $M_0\left(2, -\frac{8}{3}\right)$ чекити графиктин ийреңдөө чекити болот.

2. $f(x) = \ln(x + 2)$ ийри сызыгынын ийреңдөө чекитин тапкыла.

Мында $f'(x) = \frac{1}{x + 2}$, $f''(x) = -\frac{1}{(x + 2)^2}$ болуп, экинчи туунду нөлгө айланбайт. Ошондуктан бул ийри сызыктын ийреңдөө чекити жок. Чындыгында эле дайыма $f''(x) < 0$ болгондуктан, бул функция аныкталган областта график дайыма томпок болот. Оң сандын гана Логарифми бар болору белгилүү, ошондуктан функция $x + 2 > 0$ же $x > -2$ учурда гана аныкталат. Анын графиги координаталар окторун $M_1(-1, 0)$ жана $M_2(0, \ln 2)$ чекиттеринде кесип өтөт. Логарифмдик функциянын графигин түзүүнү билесиңер, аны түзсөңөр берилген функция дайыма өсүүчү болуп (анткени дайыма $f'(x) > 0$) графиктин томпок экендигине жана ийреңдөө чекити жок экендигине ынанасыңар.

§ 6. Ийри сызыктын асимптоталары

Аныктама. *Эгер $y = f(x)$ ийри сызыгынын $M(x, y)$ чекити ийри сызыкты бойлоп, чексиздикке умтулган кезде M чекитинен кандайдыр бир $y = kx + b$ түз сызыгына чейинки аралык нөлгө умтулса, анда ал түз сызык $y = f(x)$ ийри сызыгынын а с и м п т о т а с ы деп аталат.*

Эгерде $x \to x_0$ кезде $f(x) \to \pm\infty$ са, анда $x = x_0$ түз сызыгы $y = f(x)$ ийри сызыгын *вертикалдуу асимптотасы* деп аталат. Ошентип, вертикалдуу асимптотаны табуу үчүн $f(x) \to \pm\infty$ турган x тин маанилерин аныктоо керек.

Жалпы алганда $y = kx + b$ түз сызыгы ийри сызыктын *жантык асимптотасы* деп аталат. $k = 0$, б. а. $\operatorname{tg}\alpha = 0$ болгондо, $y = b$ горизонталдуу асимптотага ээ болобуз. Ошентип, $x \to \pm\infty$ да y белгилүү бир b турактуу санга умтулса, анда $y = b$ горизонталдуу асимптота болот.

М и с а л д а р. 1. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ функциясынын вертикалдуу жана горизонталдуу асимптоталарын тапкыла. Мында $x = -1$ жана $x = 1$ чекиттеринде бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланып, функция өзү

$\pm\infty$го умтулары ачык көрүнүп турат, демек $x=-1$ жана $x=1$ түз сызыктары вертикалдуу асимптоталар болушат.

Ал эми $x\to\pm\infty$ умтулганда, $y\to 1$ боло турганы көрүнүп турат, ошондуктан $y=1$ түз сызыгы графиктин горизонталдуу асимптотасы болот.

Эми $y=kx+b$ графиктин жантык асимптотасы болсун дейлик, анда

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0 \tag{1}$$

барабардыгы орундалат. Аны $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$ деп жазууга болот. Кийинки барабардык

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0 \text{ же } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \tag{2}$$

болгон учурда гана аткарылышы мүмкүн. Мындайча табылган k асимптотанын бурч коэффициенти болот. k табылса, b ординатасы (1) ден табылат. Ал

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] \tag{3}$$

болору белгилүү.

Э с к е р т ү ү. Мындагы (3) белгилүү бир $f(x)$ үчүн аткарылганда гана (2) дагы орундалат, бирок тескерисинче айтууга болбойт, кээде (2) орундалганы менен (3) орундалбайт, анда ийри сызыктын асимптотасы болбойт.

Алсак, $f(x)=x+\ln x$ ийри сызыгы үчүн $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\ln x}{x}=1$ болгону менен $b=\lim\limits_{x\to\infty}[x+\ln x-1\cdot x]=\infty$

Демек, бул ийри сызыктын асимптотасы жок.

Ийри сызыктын асимптоталарын билүү, анын графигин түзүүнү бир кыйла жеңилдетет.

М и с а л. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ функциясынын асимптоталарынын теңдемелерин жазгыла.

$x\to\pm 0$ кезинде $f(x)\to\pm\infty$ умтуларын байкайбыз, демек $x=0$ түз сызыгы, б. а. OY огу вертикалдуу асимптота болот. Горизонталдуу асимптотасы жок, анткени $x\to\pm\infty$ де $f(x)$ тин чектүү предели жок. Эми жантык асимптотасын издейбиз. (2), (3) боюнча:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x+\frac{1}{x}-1\cdot x\right]=0.$$

Демек, $y=x$ изделген жантык асимптота болот.

§ 7. Функцияны толук изилдөө жана анын графигин түзүү

Функциянын биринчи жана экинчи туундуларынын жардамы менен функциянын графигин толук мүнөздөөгө болот. Функцияга толук изилдөө жүргүзүү деп төмөнкүлөрдү түшүнөбүз:

1) Функциянын аныкталуу областын аныктоо.

2) Үзүлүү чекиттери болсо, аларды таап, түрлөрүн көрсөтүү.

3) Функциянын жуптугун же тактыгын жана мезгилдүүлүгүн тактоо.

4) $f'(x)=0$ болгон же туундусу болбогон шектүү чекиттерди таап, алардын экстремумун изилдөө.

5) $f'(x)$ биринчи туундунун белгиси боюнча, функция өсүүчү же кемүүчү аралыктарды көрсөтүү.

6) $f''(x)=0$ теңдемесинен ийрендөө чекитинин абсциссасын, анын ординатасын табуу.

7) $f''(x)$ тин белгилери боюнча график иймек же томпок болгон аралыктарды аныктоо.

8) Графиктин координаталар октор менен кесилишкен чекиттерин табуу.

9) Графиктин асимптоталарын табуу.

10) Графиктин мүнөздүү чекиттерин (экстремумдары, октор менен кесилишкен чекиттери) жана иймектигин, томпоктугун, өсөрүн, кемирин эске алып, функциянын графигин түзүү.

Мисалдар. Жогорку $f(x)=x+\frac{1}{x}$ функциясына толук изилдөө жүргүзүп, графигин түзгүлө.

Изилдөө. 1) Бул функция $x=0$ дөн башка бүткүл сандык окто аныкталган, б. а. анын аныкталуу областы $(-\infty, 0)$ жана $(0, +\infty)$ интервалдары болот.

2) $x=0$ чекити экинчи түрдөгү үзүлүү чекити, анткени

$$\lim_{x\to\pm 0} f(x)=\lim_{x\to\pm 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\pm\infty.$$

Мында $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ болорун дагы эскерте кетебиз.

3) Жуп эмес $y_1=x$ жана $y_2=\frac{1}{x}$ эки функциянын суммасы болгондуктан, берилген функция так.

4) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$. Мында $x^2-1=0$ дөн $x_1=-1$, $x_2=1$ шектүү чекиттери табылат. $f''(x)=\frac{2}{x^3}$; $f''(-1)=-2<0$ болгондуктан, $x_1=-1$ чекитинде функция максимумга, $f''(1)=2>0$ болгондуктан, $x_2=1$ чекитинде минимумга ээ болот. Алар $y_{\max}=-2$, $y_{\min}=2$ ге барабар.

5) Эки стационардык чекит бүткүл сандык окту: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ жана $(1, +\infty)$ үч интервалга бөлөт. $|x|>1$ болгондо, б. а. эки четки интервалда $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}>0$ болуп функция өсүү-

чү, ал эми $|x|<1$ болгон ортоңку интервалда $f'(x)<0$ болуп, функция кемүүчү болот.

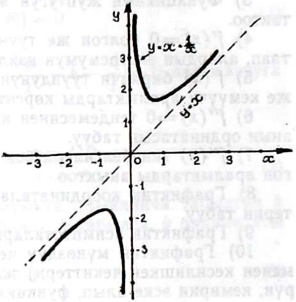
6) $f''(x)=\frac{2}{x^3}$ болгондуктан, бул экинчи туунду нөлгө айланбайт, демек графиктин ийреңдөө чекити жок.

7) $x<0$ кезинде $f''(x)<0$, ал эми $x>0$ кезинде $f''(x)>0$. Демек, $(-\infty, 0)$ интервалында график томпок, ал эми $(0, +\infty)$ интервалында иймек.

8) График координаталар октору менен кесилишпейт, анткени, $y=0$ дегенде келип чыгуучу $f(x)=0$ теңдемесинин чыгарылышы жок жана $x=0$ дө y тин чектүү мааниси жок.

9) Бул графиктин вертикалдуу асимптотасы OY огу болуп, жантык асимптотасы $y=x$ биссектрисасы болору жогорку мисалда көрсөтүлгөн.

10) Мына ушул жогоруда айтылгандар боюнча берилген функциянын графигин так түзүүгө болот (72-чийме).



72-чийме

2. $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ функциясын изилдеп графигин түзгүлө.

Изилдөө. 1) Функциянын аныкталуу областы $\frac{1-x}{x}\geqslant 0$ шартынан табылат. а) $1-x\geqslant 0$, $x>0$, $x\neq 0$. Мындан $x\leqslant 1$, $0<x$, демек аныкталуу областы $0<x\leqslant 1$ жарым интервалы болот.

б) $1-x\leqslant 0$, $x<0$, $x\neq 0$. Мында бир мезгилде $x<0$ жана $x\geqslant 1$ боло албайт.

2) Функция $x=0$ чекитинде үзүлүшкө учурайт. Мында $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$ болору $f(x)$ тин берилишинен көрүнүп турат.

3) Функциянын жуп же тактыгы жана мезгилдүүлүгү жөнүндө эч нерсе айтууга болбойт, анткени ал $(0, 1]$ жарым интервалында гана аныкталган.

$$4)\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}\cdot\frac{-x-(1-x)}{x^2}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2x\sqrt{x-x^2}}.$$

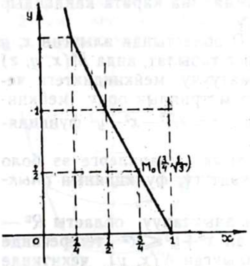
Бул биринчи туунду $0<x\leqslant 1$ жарым интервалынын ичинде нөлгө айланбайт. Ошондуктан, анын ички чекиттеринде экстремуму жок. Бирок, оң жаккы $x=1$ чекитинде $y=0$ болгон минимумга жетишет.

5) $0<x\leqslant 1$ кезинде $f'(x)$ дайыма терс болгондуктан, берилген функция өзү аныкталган областта кемүүчү функция болот.

6) $f''(x)=\dfrac{3-4x}{4x^2(1-x)\sqrt{x-x^2}}$ болорун көрсөтүүгө болот.

Аны нөлгө барабарлап, ийрендөө чекитинин абсциссасы $x_0=\dfrac{3}{4}$ болорун табабыз. Ал эми $y_0=f(x_0)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ болору ачык. Демек, $M_0\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ чекитинде график ийрендейт.

7) $x<\dfrac{3}{4}$ кезинде $f''(x)>0$ болуп, $x>\dfrac{3}{4}$ кезинде $f''(x)<0$ болот. Демек $\left(0,\ \dfrac{3}{4}\right)$ интервалында график иймек, ал эми $\left(\dfrac{3}{4},\ 1\right)$ жарым интервалында график томпок болот.



73-чийме

8) $x\to+0$ десек, $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ функциясы $+\infty$ ге умтулат. $y=0$ болсун десек, $x=1$. Демек, график OY огу менен кесилишпейт, ал эми OX огу менен $A(1,\ 0)$ чекитинде кесилишет.

9) $x=0$ чекитинде $f(x)\to+\infty$, демек $x=0$ түз сызыгы, б. а. OY огу вертикалдуу асимптота болот.

10) Жогорку маалыматтар боюнча эми графикти так түзүүгө болот (73-чийме).

X глава. КӨП ӨЗГӨРМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАР

§ 1. Негизги түшүнүктөр жана белгилөөлөр

Биз жогоруда карап өткөн функциялык көз карандылык эки өзгөрмө чондуктун арасындагы көз карандылык болуп саналат. Алардын бири аргумент, экинчи функция эле. Мындай учурда бир өзгөрмөлүү функция берилди деп да коюшат. Табийгаттын же механиканын тигил же бул кубулушун үйрөнүүдө эки гана эмес, үч, төрт жана кээде андан да көп өзгөрмө чондуктардын арасындагы функциялык көз карандылыкты кароого туура келет. Мында, алардын ичинен бири калгандарынан функция болушу ыктымал. Ошентип, кээде көп өзгөрмөдөн көз каранды болгон функцияны, б. а. көп өзгөрмөлүү функциячы кароого туура келет.

Мисалдар. 1. Негизи x, бийиктиги y болгон үч бурчтуктун аянты $S=\frac{1}{2}xy$ болуп, S аянты, x жана y эки өзгөрмөдөн функция болот.

2. Өлчөмдөрү $x,\ y,\ z$ болгон тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү: $V=x\cdot y\cdot z$ үч өзгөрмөдөн функция болот.

Эки өзгөрмөнүн функциясы жалпы учурда

$$z=f(x,\ y) \tag{1}$$

түрүндө белгиленет. Мында z функция, ал эми $x,\ y$, өзгөрмө чоңдуктары *аргументтер* деп аталат.

Үч өзгөрмөнүн функциясы:

$$u=f(x,\ y,\ z) \tag{2}$$

түрүндө белгиленет. Бул сапар u функция, $x,\ y,\ z$ тер аргументтер деп аталат.

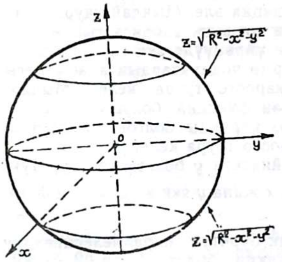
Эгерде аргументтердин ар бир маанилерине кандайдыр бир эреженин негизинде функциянын бир мааниси туура келсе, анда функция *бир маанилүү* деп, эгер бир нече маани туура келсе, анда *көп маанилүү* деп аталат.

$z=f(x,\ y)$ эки өзгөрмөлүү функция мейкиндиктеги *охуz* тик бурчтуу декарттык координаталар системасына карата кандайдыр бир бетти аныктай тургандыгы белгилүү.

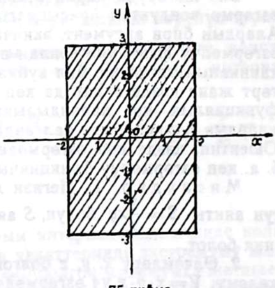
$z=f(x,\ y)$ функциясы аныкталган D областынан алынган $x,\ y$ тин ар бир түгөйүнө (1) боюнча бирден z табылат, анда $M(x,\ y,\ z)$ чекити, (1) функциянын графигинде жатуучу, мейкиндиктеги чекит болот. Ушундай M чекиттеринин геометриялык орду мейкиндикте кандайдыр бир бетти түзөт. Алсак, $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ функциясы сферанын үстүнкү бөлүгүн туюнтат.

Берилген функция, белгилүү бир анык маанилерге ээ боло турган аргументтердин маанилеринин көптүгү, функциянын *аныкталуу областы* деп аталат.

1) $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ функциясынын аныкталуу областы $R^2-x^2-y^2\geqslant 0$ шартынан табылат, б. а. ал $x^2+y^2\leqslant R^2$ тегерегинде аныкталган. Бул тегеректин ичинен алынган $N(x,\ y)$ чекитинде *оху* тегиздигине тургузулган перпендикуляр сфераны M жана T эки чекитте кесип өтөт (74-чийме). Ошондуктан $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ функциясы эки маанилүү функция болот. Эгер + жана — белгилерин айрым-айрым алсак, анда бир маанилүү функцияларга ээ болобуз. Мында + белгисине сферанын үстүнкү жарымы, — белгисине астынкы жарымы туура келет (74-чийме).



74-чийме

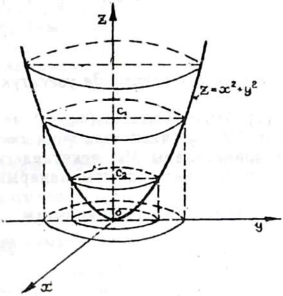


75-чийме

2) $z=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{9-y^2}$ функциясынын аныкталуу областы $4-x^2\geqslant0$ жана $9-y^2\geqslant0$ шарттарынан табылат. Мында, $|x|\leqslant2$, $|y|\leqslant3$ болгондуктан, бул функциянын аныкталуу областы $-2\leqslant\leqslant x\leqslant2$ жана $-3\leqslant y\leqslant3$ барабарсыздыктары менен аныкталган тик бурчтукту түзөт. Барабардык белгилер да болгондуктан, тик бурчтуктун чеги аныкталуу областына таандык (75-чийме).

Аныктама. *$z=f(x, y)$ функциясынын деңгээл сызыгы деп, оху тегиздигинин, берилген функция бирдей гана мааниге ээ боло турган, чекиттеринин геометриялык ордун айтышат.*

Мына ошентип, деңгээл сызыгынын теңдемеси $f(x, y)=C$ болот, мында C кандайдыр бир турактуу сан. Деңгээл сызыктарын аныктоо үчүн $z=f(x, y)$ теңдемеси туюнткан бетти xoy тегиздигине параллель болгон $z=C$ тегиздиктери менен кесип (C каалагандай сан), кесилиштен пайда болгон сызыктарды xoy тегиздигине проекциялоо керек.



76-чийме

Мисал. $z=x^2+y^2$ функциясы берилсин. Бул мейкиндикте параболоиддик айлануу бетин туюнтарын билебиз. Анын аныкталуу областы бүткүл xoy тегиздиги болот. C каалагандай $0<C<\infty$ оң сан болсо, параболоиддик айланууну $z=C$ тегиздиктери менен кескенде, кесилиште айланалар түзүлөт, алардын xoy тегиздигиндеги проекциялары да ошол эле айланалар болот. Ошентип, $z=$ $=x^2+y^2$ функциясынын деңгээл сызыктары борбору $O(0, 0)$ чекити болгон, борбордош айланалардын: $x^2+y^2=C$ түркүмү болот (76-чийме).

Аныктама. *$u=f(x, y, z)$ функциясынын деңгээл бети деп, охуz мейкиндигинин, берилген функция бирдей гана мааниге ээ боло турган, чекиттеринин геометриялык орундарын айтышат.*

Деңгээл беттин теңдемеси $f(x, y, z)=C$ болот. Мында C—каалагандай турактуу сан.

§ 2. Эки өзгөрмөлүү функциянын предели, үзгүлтүксүздүгү

$z=f(x, y)$ эки аргументтүү функциянын аныкталуу областы xoy тегиздигинин кандайдыр туюк сызык менен чектелген бөлүгү болсун. Ал туюк сызык областтын *чеги* деп аталат.

Эгер областка, анын жалаң гана ички чекиттери эмес чегинин чекиттери да таандык болсо, анда область *туюк* деп аталат.

Эгер областка ички чекиттери гана таандык болуп, чегинин чекиттери таандык болбосо, анда область *ачык* деп аталат.

$M_0(x_0, y_0)$ *чекитинин* δ *аймагы* деп, борбору M_0 радиусу δ болгон тегеректин ичинде жаткан xoy тегиздигинин бардык $M(x, y)$ чекиттеринин көптүгүн айтышат. Бул аймакта жаткан чекиттер үчүн $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ барабарсыздыгы орундалат.

1-аныктама. Эгер мурунтадан берилген $\varepsilon>0$ саны канчалык кичине болсо да $M_0(x_0, y_0)$ дун δ аймагында жатуучу жана M_0 дон айырмалуу болгон бардык $M(x, y)$ чекиттери үчүн $|f(x, y)-A|<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай $\delta>0$ саны табылса, анда A саны $f(x, y)$ функциясынын M_0 чекитиндеги п р е д е л и *деп аталат.*

Аны кыскача:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A \text{ же } \lim_{M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)} f(x, y)=A \tag{1}$$

түрүндө жазышат.

2-аныктама. Эгер $z=f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде аныкталса жана

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0) \tag{2}$$

орундалса, анда $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат.

Геометриялык жактан алганда (2) барабардык $M_0(x_0, y_0)$ чекитинин δ аймагында жаткан бардык $M(x, y)$ чекиттери үчүн $z=f(x, y)$ бетиндеги чекиттердин аппликаталары M_0 чекитиндеги $f(x_0, y_0)$ аппликатасынан $\varepsilon>0$ дон кичине санга айырмаланарын туюнтат.

Эгер $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$ болсун десек, (2) барабардыкты:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f(x_0, y_0) \tag{3}$$

же

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)]=0 \tag{3a}$$

түрүндө жазууга болот. Мындагы:

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0) \tag{4}$$

айырмасын, $z=f(x, y)$ функциясынын $M_0(x_0, y_0)$ чекитиндеги *толук өсүндүсү* дешет. Эми үзгүлтүксүздүктү төмөнкүчө аныктаса да болот:

Эгер аргументтердин Δx жана Δy чексиз кичирейүүчү өсүндүлөрүнө $z=f(x, y)$ функциясынын дагы чексиз кичирейүүчү Δz өсүндүсү туура келсе, б. а. $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$ аткарылса, анда $z=f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде ү з г ү л т ү к с ү з *деп аталат.*

Эгер $f(x, y)$ функциясы M_0 чекиттин айматында (балким өзүнөн баштап) аныкталса жана M_0 чекитинде үзгүлтүксүз болбосо, анда ал функцияны M_0 чекитинде *үзгүлтүктүү* деп, M_0 чекитин *үзүлүү чекити* деп аташат.

Мисалдар. 1. $z=x^2+y^2$ функциясы бүткүл xoy тегиздигинде үзгүлтүксүз.

Чынында эле: $\Delta z=(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2-(x^2+y^2)=2x\Delta x+$ $+\Delta x^2+2y\Delta y+\Delta y^2$. Ошондуктан, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$

2. $z=\dfrac{x+y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$ функциясы $M_0(1,\ 1)$ чекитинде үзгүлтүктүү, анткени бул функция $M_0(1,\ 1)$ чекитинде аныкталган эмес, ошондуктан бул чекитте (2) шарт аткарылбайт.

§ 3. Жекече туундулар, алардын геометриялык мааниси

$z=f(x,\ y)$ функциясынын толук өсүндүсү менен тааныштык. Эгер аргументтердин бири эле өсүндү алса, анда жекече өсүндүлөргө ээ болобуз, алсак $\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$ айырмасы y боюнча *жекече өсүндүсү* деп аталат.

Аныктама. *Эгер $z=f(x,\ y)$ функциясынын x боюнча жекече өсүндүсүнүн Δx өсүндүсүнө болгон катышы $\Delta x\to 0$ дө чектүү пределге умтулса, б. а.*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x} \tag{1}$$

предели чектүү болсо, анда ал $z=f(x,y)$ функциясынын x боюнча жекече туундусу деп аталат да, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,\ y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ аркылуу белгиленет.

Бул функциянын y боюнча жекече туундусу дале ушул сыктуу аныкталат: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Мында x боюнча жекече туунду алганда, y ти турактуу деп эсептеп, ал эми y боюнча жекече туунду алганда, x ти турактуу деп эсептеп, туунду алуунун кадимки эле эрежелери боюнча туунду ала берүү керек.

Мисалдар.

1. $z=x^3+3x^2y-y^3$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6xy;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3x^2-3y^2.$$

2. $z=\ln(x^2-y^2)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2-y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-2y}{x^2-y^2}$.

3. $z=\dfrac{xy}{x-y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{(x-y)\,y-xy}{(x-y)^2}=\dfrac{-y^2}{(x-y)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

$$=\frac{(x-y)\,x-xy\cdot(-1)}{(x-y)^2}=\frac{x^2}{(x-y^2)}.$$

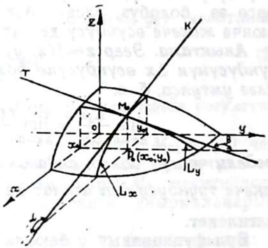
4. $u=\dfrac{2x-t}{x+2t}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{(x+2t)\cdot 2-(2x-t)}{(x+2t)^2}=\dfrac{5t}{(x+2t)^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{(x+2t)\cdot(-1)-(2x-t)\cdot 2}{(x+2t)^2}=\frac{-5x}{(x+2t)^2}.$$

5. $u=\sin^2(x+y)-\sin^2 x-\sin^2 y\cdot\quad \frac{\partial u}{\partial x}=?\ \frac{\partial u}{\partial y}=?$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\sin(x+y)\cos(x+y)-2\sin x\cos x=\sin 2(x+y)-\sin 2x=$$
$$=2\sin y\cos(2x+y).$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=2\sin(x+y)\cos(x+y)-2\sin y\cos y=\sin(2x+y)-\sin 2y=$$
$$=2\sin x\cos(x+2y).$$

Эми $z=f(x, y)$ эки өзгөрмөлүү функциянын $\frac{\partial z}{\partial x}$ жана $\frac{\partial z}{\partial y}$ жекече туундуларынын геометриялык маанисине токтолобуз. $z=f(x, y)$ функциясы мейкиндикте кандайдыр бир бетти туюнтарын билебиз (77-чийме). Бул бетти xoz ке параллель болгон $y=y_0=\text{const}$ тегиздиги менен кесскенде бетте $4x$ ийри сызыгы пайда болсун. M_0K ошол ийри сызыкка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныма болуп, α ал жаныма OX огунун оң багытынын түзгөн бурчу болсун. Ал эми $\frac{\partial z}{\partial x}=\left[\frac{dz}{dx}\right]_{y=\text{const}}$ болгондуктан, кадимки функциянын туундусунун геометриялык маанисин эске алсак: $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha$ болору белгилүү. Ушул сыяктуу эле эгер $x=x_0=\text{const}$ тегиздиги бетти $4y$ ийри сызыгы боюнча кесип өтсө, M_0T ага M_0 чекитинде жүргүзүлгөн жаныма болсо, β анын OY огу менен түзгөн бурчу, анда $\frac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{tg}\beta$ болору ачык.



77-чийме

Ошентип, $\frac{\partial z}{\partial x}$ жана $\frac{\partial z}{\partial y}$ жекече туундулар $M_0(x_0, y_0, z_0)$ чекити аркылуу zox жана zoy координаталар тегиздигине параллель жүргүзүлгөн тегиздиктер $z=f(x, y)$ бетин кесип өткөндөн пайда болгон ийри сызыктарга жүргүзүлгөн жанымалардын бурч коэффициенттери болуп саналат (77-чийме).

§ 4. Толук дифференциал

Бизге $z=f(x, y)$ функциясы берилсин. Анын $M_0(x_0, y_0)$ чекитиндеги толук өсүндүсүн карайбыз:

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

Мындагы $M_0(x_0, y_0)$ жана $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ чекиттеринин арасындагы аралык $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ болсун.

Аныктама. *Эгер $z=f(x, y)$ функциясынын (1) толук өсүндүсү*

$$\Delta f(x_0, y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\varepsilon(\Delta x, \Delta y)\cdot\rho \tag{2}$$

түрүндө туюнтулуп, мындагы A жана B лар Δx менен Δy тен көз каранды болбой x_0 жана y_0 дон гана көз каранды болсо, ал эми $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ болсо, Δx, Δy тен көз каранды болуп, алар менен бирге нөлгө умтулуучу чексиз кичирейүүчү чоңдук болсо, анда $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ *чекитинде дифференцирленүүчү деп аталат.*

Мындагы $A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$ туюнтмасы Δf толук өсүндүсүнүн Δx жана Δy ке карата башкы (сызыктуу) бөлүгү болуп саналат, анткени $\varepsilon\rho$ кошулуучусу Δx жана Δy ке караганда (б. а. ρ го караганда) жогорку тартиптеги чексиз кичирейүүчү чоңдук болот. (2) формуланы көбүнчө:

$$\Delta f(x_0, y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y \tag{3}$$

түрүндө жазышат, мындагы $\varepsilon=\frac{\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y}{\rho}$ чоңдугу $\rho\to 0$ кезде нөлгө умтулат. Бул (2) жана (3) туюнтмалар бири-бирине эквиваленттүү.

М и с а л. $z=x^2+y^2$ функциясы каалагандай $M(x, y)$ чекитинде дифференцирленүүчү болот, анткени

$$\Delta z=(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2-(x^2+y^2)=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2+2y\cdot\Delta y+\Delta y^2.$$

Мында $2x\cdot\Delta x+2y\cdot\Delta y$ кошулуучусу толук өсүндүнүн башкы бөлүгү, ал эми $\Delta x^2+\Delta y^2$ кошулуучусу Δx менен Δy ке караганда жогорку тартиптеги чексиз кичирейүүчү чоңдук.

Аныктама. *Эгер $z=f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда анын толук өсүндүсүнүн башкы (сызыктуу) бөлүгү, б. а. $A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$ туюнтмасы $f(x, y)$ функциясынын M_0 чекитиндеги толук дифференциалы деп аталат* да, $df(x, y)$ же dz аркылуу белгиленет:

$$dz=df(x, y)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y \tag{4}$$

Жогоруда биз көз каранды эмес x чоңдугунун Δx өсүндүсү анын dx дифференциалы менен дал келишерин көргөнбүз: $\Delta x=dx$. Ошол сыяктуу эле $\Delta y=dy$ болот. Буларды эске алсак, толук дифференциал

$$dz=Adx+Bdy \tag{4a}$$

түрүндө жазылат.

1-теорема. *Эгер $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда анын толук дифференциалы бардык жекече туундулары менен ага тиешелүү көз каранды эмес чоңдуктун дифференциалдарынын көбөйтүндүлөрүнүн суммасына барабар,* б. а.

$$df(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \tag{5}$$

Д а л и л д ө ө. Шарт боюнча $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчү болгондуктан, анын толук дифференциалы (4а) формуласы аркылуу туюнтулат. Мындагы A жана B ны аныктоо үчүн (3) формуладан пайдаланабыз:

$$\Delta f = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y, \tag{3}$$

мында α жана β лар Δx, Δy тер$\to 0$ кезде чексиз кичирейүүчүлөр. Эгер $\Delta y=0$ болсун десек (3) дөн $\Delta_x f = A\cdot\Delta x + d\cdot\Delta x$ жекече өсүндүгө ээ болобуз. Мындан $\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A+\alpha$, демек $\Delta x\to 0$ да $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = A$.

Ал эми $\Delta x=0$ болсун десек, (3) дөн ушул эле сыяктуу $\frac{\partial z}{\partial y} = B$ келип чыгат. A менен B нын маанилерин (4а) га коюп, (5) ке ээ болобуз. Теорема далилденди.

2-теорема. *(Д и ф ф е р е н ц и р л е н ү ү ч ү л ү к т ү н ж е т и ш т ү ү ш а р т ы). Эгер $z=f(x, y)$ функциясы үзгүлтүксүз $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ жекече туундуларга ээ болсо, анда ал дифференцирленүүчү болот жана (5) толук дифференциалга ээ болот.*

Д а л и л д ө ө: $f(x, y)$ функциясынын толук өсүндүсүн карайбыз: $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$. Оң жагынан $f(x, y+\Delta y)$ ти кемитип, кайра кошобуз:

$$\Delta f = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)] \tag{6}$$

Чарчы кашаадагылардын биринчиси x боюнча, экинчиси y боюнча жекече өсүндүлөр. Аларга Лагранждын чектүү өсүндү жөнүндөгү теоремасын колдонобуз:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f'_x(\bar{x}, y+\Delta y)\cdot\Delta x,$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, \bar{y})\cdot\Delta y,$$

мында $x<\bar{x}<x+\Delta x$, $y<\bar{y}<y+\Delta y$. Буларды (6) га койсок:

$$\Delta f = f'_x(\bar{x}, y+\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x, \bar{y})\cdot\Delta y \tag{7}$$

келип чыгат, мында Δx, Δy тер каалагандай кичине өсүндүлөр.

Шарт боюнча $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ үзгүлтүксүз, ошондуктан алардын $M(x, y)$ жана $M_1(\bar{x}, y+\Delta y)$, ошондой эле $M(x, y)$ жана $M_2(x, \bar{y})$ чекиттердеги маанилери бири-биринен чексиз кичирейүүчү чоңдуктарга гана айырмаланат:

$$f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha;\quad f'_y(x, \bar{y}) = f'_y(x, y) + \beta,$$

мында α жана β лар Δx, Δy тер менен бирге, чексиз кичирейүүчүлөр. Буларды (7) ге коюп чыксак:

$$\Delta f = f'_x(x, y)\cdot\Delta x + f'_y(x, y)\cdot\Delta y + (\alpha\Delta x + \beta\cdot\Delta y) \tag{8}$$

келип чыгат. Аныктама боюнча толук өсүндүнүн башкы сызыктуу бөлүгү функциянын толук өсүндүсү болот, демек

$$dz = f'_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy \tag{5}$$

Теорема далилденди.

3-теорема. *Эгер $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда ал ошол чекитте үзгүлтүксүз болот.*

Д а л и л д ө ө. $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчү болгондуктан, аныктама боюнча (2) формула орундалат, андагы A жана B лар Δx, Δy өсүндүлөрүнөн көз каранды эмес жана $\rho \to 0$ да $\varepsilon \cdot \rho \to 0$. Ошентип $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ да пределге өтсөк: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f = 0$ болуп, $f(x, y)$ функциясы M_0 чекитинде үзгүлтүксүз болот.

М и с а л д а р 1. $z = \ln(x^2 - y^2)$ функциясынын толук дифференциалын тапкыла.

Мында $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 - y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y}{x^2 - y^2}$. Демек,

$$dz = \frac{2x\,dx}{x^2 - y^2} - \frac{2y\,dy}{x^2 - y^2} = \frac{2(x\,dx - y\,dy)}{x^2 - y^2}.$$

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. $dz = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Эгер $u = f(x, y, z)$ үч өзгөрмөлүү функция $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ жана $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсо, анда анын толук дифференциалы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \tag{9}$$

түрүндө туюнтулат. Эгер функция $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументтүү, б. а. n өзгөрмөлүү болсо, анда толук дифференциал:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n \tag{10}$$

аркылуу туюнтулат.

М и с а л. $u = \sqrt{1 - \dfrac{x}{y}} \cdot \cos(zy)$. $du = ?$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x}{y}}} \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) \cos(zy); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x}{y}}} \times$$

$$\times \frac{x}{y^2} \cos(zy) - \sqrt{1 - \frac{x}{y}} \cdot \sin(zy) \cdot z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\sqrt{1 - \frac{x}{y}} \cdot \sin(zy) \cdot y.$$ Демек (9) боюнча:

$$du = \frac{-\cos(zy)\,dx}{2y\sqrt{1 - \frac{x}{y}}} + \left(\frac{x\cos(zy)}{2y^2\sqrt{1 - \frac{x}{y}}} - \sqrt{1 - \frac{x}{y}} \cdot z\sin(zy)\right) dy -$$

$$- \sqrt{1 - \frac{x}{y}} \times y\sin(zy) \cdot dz.$$

§ 5. Толук дифференциалдын жакындаштырып эсептөөлөргө колдонулушу

Аргументтин Δx жана Δy өсүндүлөрү жетиштүү даражада кичине болгондо дифференцирленүүчү функциянын $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$ толук өсүндүсүн анын $df(x, y) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ толук дифференциалы менен жакындаштырып алмаштырууга болот:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \quad (11)$$

Мында Δx, Δy тер канчалык кичине болсо, мындайча алмаштырууда кетирилген каталык дагы ошончолук кичине болот.

Эгер $x_0+\Delta x = x$, $y_0+\Delta y = y$ десек, (11) ден:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y-y_0) \quad (12)$$

жакындаштырылган формулага ээ болобуз.

Геометриялык жактан талкуулаганда (12) формула $z = f(x, y)$ бетинин $M_0(x_0, y_0)$ чекитинин аймагындагы бөлүгүн, ошол чекитте бетке жүргүзгөн жаныма тегиздиктин бөлүгү менен алмаштыргандык болот.

Мисал. Жактары $x=4$ м, $y=3$ м болгон тик бурчтук берилген. Эгер анын x жагы 5 см чоңоюп, ал эми y жагы 7 см ге кичирейсе, анда диагоналы канчалык өзгөрөт?

Тик бурчтуктун диагоналы жактарынан көз каранды болгондуктан, аны $z = f(x, y)$ функциясы түрүндө жазууга болот. Анда $z = \sqrt{x^2+y^2}$ болору белгилүү. Бул функциянын Δz толук өсүндүсүн dz толук дифференциалы менен алмаштырып:

$$\Delta z \approx dz = \frac{x \cdot \Delta x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y \cdot \Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x \cdot \Delta x + y \cdot \Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

формуласына ээ болобуз. Буга $x=4$ м, $\Delta x = 0{,}05$ м, $y=3$ м, $\Delta y = -0{,}07$ м деп коюп:

$$\Delta z \approx \frac{4 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot (-0{,}07)}{\sqrt{16+9}} = \frac{-0{,}01}{5} = -0{,}002 \text{ м}$$

экендигин табабыз. Демек, тик бурчтуктун диагоналы болжол менен 0,2 см ге кичирейет.

Ошол эле (1) формуланын жардамы менен аргументтердин маанилеринин *пределдик абсолюттук каталары* белгилүү болгондо, $f(x, y)$ функциясынын маанисин эсептөөдө кетирилүүчү *пределдик абсолюттук катаны* дагы эсептөөгө болот.

Алсак, $|\Delta x| \leqslant \delta x$ жана $|\Delta y| \leqslant \delta y$ болсун, мында δx жана δy аргументтердин абсолюттук каталары.

Эми функциянын Δz толук өсүндүсүн толук дифференциал менен алмаштырабыз:

$$|\Delta z| = |f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y)\,dy|.$$

Мындан

$$\delta z \leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \cdot \delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \cdot \; y \quad (13)$$

келип чыгары белгилүү, мында δz болсо, $z=f(x, y)$ функциясынын маанисин эсептөөдө кетирилүүчү пределдик абсолюттук каталык. Эгер аны $|z_0|$ ге бөлсөк, *пределдик салыштырмалуу каталык* табылат.

Мисалдар. 1. $z=x\cdot y$ көбөйтүндүсүн карайлы. Мында $z'_x=y$, $z'_y=x$ болгондуктан, (13) боюнча $\delta z=|y|\cdot\delta x+|y|\cdot\delta y$.

Демек, $\frac{\delta z}{|z_0|}=\frac{\delta x}{|x_0|}+\frac{\delta y}{|y_0|}$.

Ошентип, көбөйтүндүнүн салыштырма каталыгы көбөйтүүчүлөрдүн салыштырма каталыктарынын суммасына барабар.

2. Эми $z=\frac{x}{y}$ тийиндисин карайлы. Мында $z'_x=\frac{1}{y}$, $z'_y=-\frac{x}{y^2}$ болгондуктан (3) боюнча: $\delta z=\left|\frac{1}{y}\right|\cdot\delta x+\left|-\frac{x}{y^2}\right|\cdot\delta y$. Эки жагын тең $|z|$ ке бөлүп: $\frac{\delta z}{|z|}=\frac{\delta x}{|x|}+\frac{\delta y}{|y|}$ экендигине ынанабыз.

Демек, тийиндинин салыштырма каталыгы бөлүнүүчү менен бөлүүчүнүн салыштырма каталыктарынын суммасына барабар.

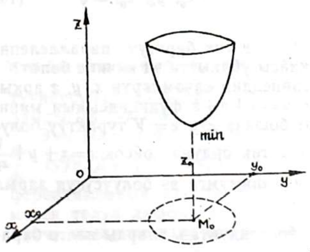
§ 6. Эки өзгөрмөлүү функциянын экстремуму

Аныктама. *Эгер $M_0(x_0, y_0)$ чекитинин кандайдыр бир аймагындагы бардык $M(x, y)$ чекиттери үчүн дайыма*

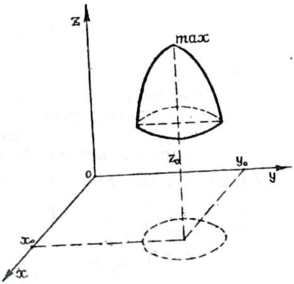
$$f(x, y)<f(x_0, y_0) \quad [f(x, y)>f(x_0, y_0)] \tag{14}$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда $f(x, y)$ функциясын $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде ***максимумга (минимумга)*** *ээ болот деп айтышат.* Эгер (14) тө барабарсыздык белгиси менен бирге барабардык белги дагы турса, анда аларды *өздүк максимум (өздүк минимум)* деп аташат. Алар чогуусу менен экстремум деп аталат (78—79-чиймелер).

Эки өзгөрмөлүү функциянын экстремумга ээ болушунун зарыл шартын көрсөтүүгө болот.



78-чийме



79-чийме

Теорема. *Эгер $z=f(x, y)$ дифференцирленүүчү функция $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде экстремумга ээ болсо, анда бул чекитте $\frac{\partial z}{\partial x}$ жана $\frac{\partial z}{\partial y}$ жекече туундуларынын экөө тең нөлгө барабар болот,* б. а.

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \quad f'_y(x_0, y_0)=0 \tag{13}$$

шарты аткарылат.

Д а л и л д ө ө. $z=f(x, y)$ функциясы максимумга ээ болгон учурун карайлы. Атап айтканда $f(x, y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде максимумга ээ болсун дейлик, б. а. Δx кандай гана болсо да, $f(x_0, y_0)>f(x_0+\Delta x, y_0)$ барабарсыздыгы аткарылсын. Анда $\Delta x>0$ болсо, $\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}<0$, ал эми $\Delta x<0$ болсо, $\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}>0$ барабарсыздыктарына ээ болобуз. Эгер $\Delta x\to 0$ дө пределге өтсөк, бул акыркы эки барабарсыздыктан $f'_x(x_0, y_0)\leqslant 0$ жана $f'_x(x_0, y_0)\geqslant 0$ болоруна ээ болобуз. Ал эми бир эле чоңдук бир эле мезгилде оң да, терс да боло албайт, ошондуктан $f'_x(x_0, y_0)=0$ гана болушу тийиш.

$f'_y(x_0, y_0)=0$ болору да ушул сыяктуу эле далилденет. $f(x, y)$ функциясы минимумга ээ болгон учурунда да $f'_x(x_0, y_0)=0$, $f'_y(x_0, y_0)=0$ болору ачык. Зарыл шарттан табылган $M_0(x_0, y_0)=0$ чекити *стационардык чекит* деп аталат.

Ушул (13) шарты $z=f(x, y)$ функциясынын экстремумга ээ болушунун зарыл гана шарты болуп саналат, бирок жетиштүү шарт эмес, анткени кандайдыр бир чекитте функциянын бардык жекече туундулары нөлгө барабар болгону менен, ал функция ошол чекитте эч кандай экстремумга ээ болбой калышы да ыктымал.

Үч өзгөрмөлүү $u=f(x, y, z)$ функциясы үчүн экстремумга ээ болуунун зарыл шарты

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)=0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0)=0, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0)=0 \tag{14}$$

болот.

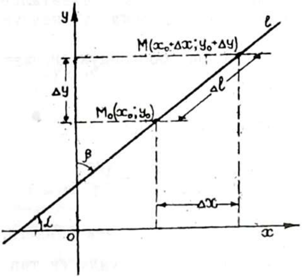
М и с а л. Көлөмү турактуу болгон тик бурчтуу параллелепипеддин үч өлчөмүнүн суммасы, кайсы убакытта эң кичине болот?

Эгер тик бурчтуу параллелепипеддин өлчөмдөрүн x, y, z аркылуу белгилесек, коюлган маселе $u=x+y+z$ функциясынын минимумун издөөгө келтирилет. Шарт боюнча $x\cdot y\cdot z=V$ турактуу болушу керек, мындан $z=\frac{V}{xy}$ ти таап, z тин ордуна койсок, $u=x+y+\frac{V}{xy}$ келип чыгат. Эми ушул функция минимумга ээ болуусунун зарыл шартын издейбиз.

$u'_x=1-\frac{V\cdot y}{x^2y^2}$, $u'_y=1-\frac{V\cdot x}{x^2y^2}$ болгондуктан, аларды нөлгө барабарлап, $y(x^2y-V)=0$, $x(xy^2-V)=0$ системасына ээ болобуз. Параллелепипеддин өлчөмдөрү болгондуктан, x жана y нөлдөн айырмалуу болуулары тийиш. Ошондуктан алдыңкы теңдемелерди x жана y ке кыскартып, $x^2y-V=0$, $xy^2-V=0$ системасына келебиз. Мындан $x^2y=xy^2$ же $x=y$ болгондуктан, $x=y=\sqrt[3]{V}$ экендигин табабыз. Ал эми $xyz=V$ экендигин эске алсак, $z=\sqrt[3]{V}$ келип чыгат. Ошентип, турактуу көлөмгө ээ болгон тик бурчтуу параллелепипеддин өлчөмдөрү өз ара барабар болгон кезде гана, алардын суммасы эң кичине болот, б. а. ал параллелепипед — куб болушу керек.

§ 7. Багыт боюнча туунду

Кандайдыр бир E областында аныкталган $z=f(x, y)$ функциясы берилсин. Ошол областтын $M_0(x_0, y_0)$ чекити аркылуу l түз сызыгы өтсүн, ал OX жана OY октору менен α жана β бурчтарын түзсүн. $M_0(x_0, y_0)$ чекити $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ чекитине көчкөндө $z=f(x, y)$ функциясы $\Delta_l z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$ (1) өсүндүсүнө ээ болот. Муну $f(x, y)$ функциясынын l багыты боюнча өсүндүсү деп аташат. Эгер $M_0M=\Delta l$ десек:



80-чийме

$$\Delta x=\Delta l\cdot\cos\alpha,\ \Delta y=\Delta l\cdot\cos\beta \quad (15)$$

болору ачык (80-чийме).

Аныктама. *$z=f(x, y)$ функциясынын l багыты боюнча туундусу деп, $\Delta_l f$ өсүндүсүнүн Δl ге болгон катышынын $\Delta l\to 0$ кездеги пределин айтышат да, аны $\frac{\partial f}{\partial e}$ аркылуу белгилешет:*

$$\frac{\partial f}{\partial e}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_e f}{\Delta l} \quad (16)$$

Бул аныктама боюнча $f(x, y)$ функциясынын $\frac{\partial f}{\partial x}$ жана $\frac{\partial f}{\partial y}$ жекече туундулары, ал функциянын OX жана OY окторунун багыты боюнча туундулары болот. Багыт боюнча алынган $\frac{\partial f}{\partial l}$ туундусу $f(x, y)$ функциясынын l багыты боюнча өзгөрүүсүнүн ылдамдыгын туюнтат.

Эми $f(x, y)$ функциясы дифференцирленүүчү деп божомолдоп, $\frac{\partial f}{\partial l}$ туундусу үчүн формула чыгарабыз. Функциянын толук дифференциалынын аныктамасы боюнча функциянын толук өсүндүсү менен толук дифференциалы жогорку тартиптеги чексиз кичирейүүчү чоңдукка гана айырмаланары белгилүү. Ошондуктан:

$$\Delta_e f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y. \quad (17)$$

Мында $\Delta x \to 0$ жана $\Delta y \to 0$ да $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$. Эгер (15) ти эске алсак:

$$\Delta_e f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\right)\Delta l + \left(\alpha\cos\alpha + \beta\cos\beta\right)\cdot\Delta l$$

келип чыгат. Мындан

$$\frac{\Delta_l f}{\Delta l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \alpha\cos\alpha + \beta\cos\beta \tag{18}$$

болору ачык. $\Delta l \to 0$ дө пределге өтүп:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta \tag{19}$$

формуласына ээ болобуз.

Эгер функция $u=f(x, y, z)$ үч өзгөрмөлүү болсо, анда анын багыт боюнча туундусу:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \tag{20}$$

аркылуу туюнтуларын далилдөөгө болот, мында $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ болсо, l түз сызыгынын багыттоочу косинустары.

Мисалдар. 1. $u=\ln(e^x+e^y)$ функциясынын координаталар бурчунун биссектрисасына параллель багыт боюнча туундусун аныктагыла.

Мында l багыты биссектрисага багытташ болгондуктан, $\alpha = \beta = 45°$, б. а. $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ал эми $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x+e^y}$ болгондуктан,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{e^x}{e^x+e^y}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{e^y}{e^x+e^y}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{e^x+e^y}{e^x+e^y}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ функциясынын $M_0(a, b, c)$ чекитиндеги, ушул чекиттин радиус-векторунун багыты боюнча туундусун тапкыла.

Мында $r = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\cos\alpha = \frac{a}{r}$, $\cos\beta = \frac{b}{r}$, $\cos\gamma = \frac{c}{r}$

экендигин байкоо кыйын эмес.

Ал эми $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$ болгондуктан, $M_0(a, b, c)$ чекитиндеги алардын маанилери $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} = \frac{2}{a}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} = \frac{2}{b}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} = \frac{2}{c}$

болот. Демек изделген багыт боюнча туунду:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial e}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}\cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}\cdot\cos\beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}\cdot\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

болот.

§ 8. Эки өзгөрмөлүү функциянын градиенти

Аныктама. *$z=f(x, y)$ функциясынын $M_0(x_0, y_0)$ чекитиндеги градиенти деп, хоу тегиздигиндеги проекциялары: $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}$ болгон векторду айтышат да, аны $\vec{g}=\operatorname{grad}f(x, y)$ аркылуу белгилешет:*

$$\vec{g}=\operatorname{grad}f(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}. \tag{21}$$

Анын узундугу:

$$|\operatorname{grad}f(x, y)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \tag{22}$$

формула боюнча эсептелет.

Эми функциянын градиенти менен багыт боюнча туундусунун арасындагы байланышты көрсөтөбүз. $f(x, y)$ функциясынын багыт боюнча туундусу

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta \tag{23}$$

экендигин билебиз.

l сызыгынын бирдик вектору

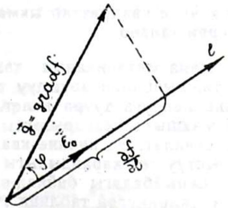
$$\vec{l_0}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j} \tag{24}$$

болсун десек, (23) формуланы (21) деги градиент менен (24) бирдик вектордун скалярдык көбөйтүндүсү деп кароого болот.

$$\operatorname{grad}f\cdot\vec{l_0}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial l}. \tag{25}$$

Ошентип, $z=f(x, y)$ функциясынын $M_0(x_0, y_0)$ *чекитиндеги l* багыты боюнча туундусу ал функциянын градиенти менен ошол ***багыттын бирдик векторунун скалярдык көбөйтүндүсүнө барабар болот.***

Демек, l багыты боюнча алынган $\frac{\partial f}{\partial l}$ туундусун $\vec{g}=\operatorname{grad}f$ векторунун l огуна түшүрүлгөн проекциясы деп кароого болот (81-чийме).



81-чийме

Бул (25) формуладан l түз сызыгынын багыты градиенттин багыты менен дал келишкен учурда гана $\frac{\partial f}{\partial l}$ туундусу эң чоң мааниге ээ боло тургандыгы көрүнүп турат, ал эң чоң маани (22) ден табылат.

Эгер функция $u=f(x, y, z)$ үч өзгөрмөлүү болсо, анда анын градиенти:

$$\vec{g}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k} \tag{26}$$

формуласы аркылуу туюнтулуп, анын чондугу

$$|\operatorname{grad} \vec{f}\,| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \tag{27}$$

боюнча эсептелет.

Мисалдар. 1. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ функциясынын $y=x$ түз сызыгындагы каалагандай чекиттен жана $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ чекитиндеги градиентин эсептегиле.

а) Каалагандай $M(x, y)$ чекити үчүн $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) =$

$= -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$ жана $y=x$ болгондуктан:

$$\operatorname{grad} z = -\frac{x\vec{i}}{2x^2} + \frac{x\cdot\vec{j}}{2x^2} = \frac{-\vec{i}+\vec{j}}{2x^2}.$$

б) Ал эми $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ чекити үчүн: $(\operatorname{grad} z)M_0 = -i+j$.

2. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ функциясынын градиентин жана анын узундугун тапкыла.

Мында:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

болгондуктан:

$$\operatorname{grad}\vec{u} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\cdot\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad |\operatorname{grad}\vec{u}\,| = 1$$

(каалагандай чекитте).

§ 9. Эмпириялык формулалар. Эң кичине квадраттар ыкмасы боюнча параметрлерди тандоо

Табийгаттын, алсак физиканын жана механиканын кээ бир маселелерин чечүүдө байкоолор же тажрыйбалар аркылуу түзүлгөн эмпириялык формулалардан пайдаланууга туура келет. Бул сыяктуу формулаларды чыгаруунун жакшы ыкмаларынын бири *эң кичине квадраттар* ыкмасы болуп саналат. Эң кичине квадраттар ыкмасын эки өзгөрмөнүн түз сызыктуу көз карандылыгы үчүн түшүндүрөбүз. $y=f(x)$ функциясы тажрыйбадагы байкап-өлчөөнүн натыйжасы катары берилсин, б. а. төмөнкүдөй таблица түрүндө алынсын:

x	x_1	x_2	x_3	.	.	.	.	x_n
y	y_1	y_2	y_3	.	.	.	.	y_n

Мында $y_i (i=1, 2, \dots, n)$ тажрыйбадан байкап-өлчөөнүн негизинде алынган, мындагы ар бир: $(x_1\, y_1)$ $(x_2\, y_2)$, ..., $(x_n\, y_n)$ түгөйлөрү аныктаган чекиттер тегиздиктеги кандайдыр бир түз сызыктын жанында топтошуп (жакындашып) жайгашкан болушсун (82-чийме). Мындай учурда x менен y тин арасындагы көз карандылык түз сызыктуу болушу мүмкүн, б. а.

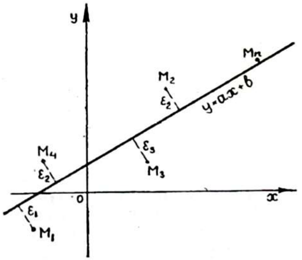
$$y=ax+b \tag{28}$$

түрүндө болбосун деген пикир туулат, мындагы a менен b азырынча белгисиз коэффициенттер, аларды параметрлер деп аташат.

Эгер $M_i(x_i, y_i)$ чекиттери изилделген түз сызыкта жатса, анда

$$ax_i+b-y_i=0 \quad (i=\overline{1, n})$$

барабардыгы аткарылар эле. Ал эми $M(x_i, y_i)$ чекиттеринин абалына жараша бул туюнтма нөлдөн айырмалуу кандайдыр бир $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ маанилерге ээ болот, ошондуктан (28) эмприялык гана формула болуп саналат. Төмөнкүдөй маселе коебуз.



82-чийме

$y=f(x)$ функциясынын маанилеринин $y=ax+b$ түз сызыгына чейинки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ аралыктарынын квадраттарынын суммасы эң кичине боло турган $y=ax+b$ сызыктуу функцияны тапсак, анда изделүүчү функционалдык көз карандылыгы тагыраак мүнөздөгөн функцияны алабыз.

Мына ушуга байланыштуу бул ыкма эң кичине квадраттар ыкмасы деп аталат.

Ар бир $M_1, M_2, \dots, M_n$ чекиттеринен (28) түз сызыкка чейинки аралыктар $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ болгондуктан,

$$y_i-(ax_i+b)=\varepsilon_i \quad (i=\overline{1, n}) \tag{29}$$

барабардыгы аткарылат, мында ε_i лер нөлдөн айырмалуу болушкан, кандайдыр бир сандар, аларды *каталыктар* деп аташат.

Эми a жана b параметрлерин

$$F(a,\ b)=\sum_{i=0}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i^2 \tag{30}$$

функциясы минимумга ээ боло тургандай кылып тандайбыз. (30) формуладагы x_i жана y_i лер байкоодон же ченөөдөн алынган мурдатан белгилүү сандар болушкандыктан (30) дагы F функциясы a жана b эки өзгөрмөлүү функция болот. Анын минимумун издөө үчүн зарыл шарттын орундалышы, б. а. a жана b боюнча алынган жекече туундулар нөлгө барабар болуусу тийиш:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a}=\sum\limits_{i=0}^{n}2\,[y_i-(ax_i+b)]\cdot(-x_i)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=\sum\limits_{i=0}^{n}2\,[y_i-(ax_i+b)]\cdot(-1)=0. \end{cases} \tag{31}$$

Буларды жөнөкөйлөтсөк:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=0}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=0}^{n}x_i=\sum\limits_{i=0}^{n}x_iy_i, \\ a\sum\limits_{i=0}^{n}x_i+b=\sum\limits_{i=0}^{n}y_i \end{cases} \tag{32}$$

түрүнө келет. Изделген a жана b параметрлер мына ушул (32) системадан аныкталат.

Бул (32) система эң кичине квадраттар ыкмасынын түз сызыктуу көз карандылыгы үчүн *нормалдуу системасы* деп аталат.

Мындан табылган a жана b ны (28) ге коюп эмпириялык формуланы толук аныктайбыз.

Мисал. Эң кичине квадраттар ыкмасы менен төмөнкүдөй таблица менен берилген $y=ax+b$ түрүндөгү эмпириялык формуланы тапкыла:

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y_i	0,1	0,4	0,4	0,5	0,9	0,9	0,9

Эсептөөнү 0,01 ге чейинки тактык менен жүргүзгүлө. Эң мурда (32) системага катышуучу x_i, y_i, x_iy_i жана x_i^2 тын маанилерин эсептеп алалык:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	
1	1,0	0,1	1,0	0,1	
2	1,5	0,4	2,25	0,6	
3	2,0	0,4	4,0	0,8	
4	2,5	0,5	6,25	1,25	
5	3,0	0,9	9,0	2,7	
6	3,5	0,9	12,25	3,15	
7	4,0	0,9	16,0	3,6	
Σ	17,5	4,1	50,75	12,2	

Бул маанилерди (32) системага коюп чыгабыз:

$$\begin{cases} a\cdot 50{,}75+b\cdot 17{,}5=12{,}2, \\ a\cdot 17{,}5+b=4{,}1. \end{cases}$$

Мына ушул системаны чыгарып, $a=0{,}23$, $b=0{,}02$ экендигин табабыз. Ошентип, мисалда берилген таблица үчүн эмприялык формула $y=0{,}23x+0{,}02$ болот.

III БӨЛҮМ

ИНТЕГРАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨР

XI глава. АНЫКТАЛБАГАН ИНТЕГРАЛ

§ 1. Тунгуч функция жана аныкталбаган интеграл

Дифференциалдык эсептөөдө берилген функциянын туундусу же дифференциалы табылат. Эми тескери маселе коюлсун. Бизге белгилүү болгон туундусу же дифференциалы боюнча мурда берилген функцияны табуу, б. а. $f(x)$ берилсе, туундусу $F'(x)=f(x)$ же дифференциалы $dF(x)=f(x)dx$ боло турган $F(x)$ функциясын аныктоо керек болсун. Муну дифференцирлөөгө тескери амал болгон *интегралдоо* деп аталуучу амал менен ишке ашырууга болот. Ушуга байланыштуу ал *интегралдык эсептөөлөр* деп аталат.

Аныктама. *Туундусу берилген $f(x)$ функциясына барабар $F'(x)=f(x)$ боло турган $F(x)$ функциясы $f(x)$ тин тунгуч функциясы деп аталат.*

Мисалдар. 1. $F(x)=x^4$ функциясы $f(x)=4x^3$ үчүн тунгуч болот, анткени $(x^4)'=4x^3$.

2. $F(x)=\cos 5x$ функциясы $f(x)=-5\sin 5x$ үчүн тунгуч, анткени $(\cos 5x)'=-5\sin 5x$.

Тунгуч функциялар жалгыз эмес, алар көп болушат, чынында эле

$$f(x) = 4x^3 \text{ үчүн } x^4+1; \quad x^4-8; \quad x^4-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ж. б. бардыгы тунгучтар болот, анткени алардын бардыгынын туундулары $4x^3$ ка барабар. Бардык тунгуч функциялар бири-биринен турактуу чондукка гана айырмаланат.

Теорема. Эгерде кандайдыр бир аралыкта $F(x)$ жана $\Phi(x)$ функциялары бир эле $f(x)$ үчүн тунгуч функциялар болсо, анда алар ошол аралыкта бири-биринен турактуу кошулуучуга гана айырмаланат.

Далилдөө. Шарт боюнча алынган аралыкта $F'(x)=f(x)$ жана $\Phi'(x)=f(x)$. Эгер $\varphi(x)=\Phi(x)-F(x)$ болсун десек, анда $\varphi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. Туунду алуунун эрежелеринен: турактуу сандын гана туундусу нөл болорун билебиз, демек $\varphi(x)=C=\text{const}$ болушу тийиш. Бул маанини жогорку айырмага койсок $\Phi(x)=F(x)+c$ болот да теорема далилденет. Ошентип $F'(x)=f(x)$ жана C каалагандай турактуу сан болсо, $F(x)+C$ суммасы да $f(x)$ үчүн тунгуч болот.

Аныктама. *Берилген $f(x)$ функциясы үчүн бардык тунгуч функциялардын $F(x)+C$ жыйындысы $f(x)$ функциясынын аныкталбаган интегралы деп аталат да,*

$$\int f(x)dx=F(x)+C \tag{1}$$

символу менен белгиленет. Мында $f(x)$ интеграл ичиндеги функция деп, $f(x)dx$ интеграл ичиндеги туюнтма деп, ал эми $\int$ символу аныкталбаган интегралдын белгиси деп аталат. Мында C турактуусу каалагандай мааниге ээ боло алат, б. а. анын мааниси так аныкталган эмес. (1) интегралдын аныкталбаган интеграл деп аталышы мына ушуга байланыштуу.

Аныкталбаган интеграл төмөнкүдөй касиеттерге ээ. Алар 1—3-теоремалар аркылуу берилген.

1-теорема. *Аныкталбаган интегралдын туундусу, интеграл ичиндеги функцияга барабар:*

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x). \tag{2}$$

Далилдөө. Аныктама боюнча $F'(x)=f(x)$ болсо, $\int f(x)dx=F(x)+C$. Бул барабардыктын эки жагын тең дифференцирлеп, $F'(x)=f(x)$ экендигин эске алсак, (2) ге ээ болобуз. Теорема далилденди.

2-теорема. *Аныкталбаган интегралдын дифференциалы интеграл ичиндеги туюнтмага барабар:*

$$d\int f(x)dx=f(x)dx. \tag{3}$$

Бул теореманы далилдөө үчүн (1) барабардыктын эки жагынан тең дифференциал алып, аныктаманы эске алуу жетиштүү.

3-теорема. *Кандайдыр бир $F(x)$ функциясынын дифференциалынын аныкталбаган интегралы ошол функцияга каалагандай турактуу сандын кошулганына барабар:*

$$\int dF(x)=F(x)+C. \tag{4}$$

Д а л и л д ө ө. Муну далилдөө үчүн, анын эки жагынын тең дифференциалы өз ара барабар экендигин көрсөтүү жетиштүү болот.

Сол жагынын дифференциалы 2-касиет боюнча $d\int dF(x) = dF(x)$ болот. Оң жагыныкы да $d[f(x)+C] = dF(x)$ болот, демек (4) барабардык туура.

§ 2. Интегралдардын негизги таблицалары

Жогорудагы туундулардын таблицаларынан пайдаланып, интегралдардын төмөнкүдөй таблицасын түзүүгө болот:

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int 1 \cdot dx = x + C.$

3. $\int x^{\mu}\, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}, \quad (\mu \neq -1).$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

5a. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C. \end{cases}$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

6a. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C, \\ -\arccos\frac{x}{a} + C. \end{cases}$

7. $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

7a. $\int e^x dx = e^x + C.$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \operatorname{tg} x + C.$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot dx = \ln [x + \sqrt{x^2 \pm a^2}] + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

14. $\int chx\, dx = shx + C.$

15. $\int shx\, dx = chx + C.$

16. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = \int \frac{dx}{1 + sh^2 x} = thx + C.$

17. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = \int \frac{dx}{ch^2 x - 1} = -cthx + C.$

Бул таблицалардын тууралыгын текшерүү үчүн ар бир формуланын оң жагынан туунду алуу керек, ошондо алардын туундусу тиешелүү формуладагы интеграл ичиндеги функцияга барабар болсо, таблица туура болот. Ар бир формуланын туура экендигин текшерип чыгууну өзүңөргө сунуш кылабыз.

§ 3. Интегралдоонун эрежелери

I. Эгерде A—турактуу сан болсо, анда

$$\int A \cdot f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx \qquad (5)$$

болот, б. а. турактуу коэффициентти интегралдын белгисинин сыртына чыгарууга болот.

Чындыгында эле (5) формуланын оң жакки туюнтмасынын дифференциалын алсак,

$$d[A \cdot \int f(x) dx] = A \cdot d \int f(x) dx = A \cdot f(x) dx$$

экендигин көрөбүз. Ал эми (5) нин сол жаккы туюнтмасынын дифференциалы дагы $A \cdot f(x) dx$ болот, демек (5) формула туура.

II. *Функциялардын алгебралык суммасынын интегралы, ал функциялардын интегралдарынын алгебралык суммасына барабар:*

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx. \qquad (6)$$

Муну далилдөө үчүн эки жагынын дифференциалы өз ара барабар экендигин көрсөтүү жетиштүү болот. Он жагыныкы $d[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx] = d\int f(x)dx \pm d\int g(x)dx = [f(x) \pm g(x)]dx$ болот. Интегралдын касиети боюнча сол жагынын дифференциалы дагы $[f(x) \pm g(x)]dx$ ке барабар, демек (9) формула туура.

III. Эгерде $\int f(t)dt = F(t) + C$ болсо, анда

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \tag{7}$$

болот. Чындыгында эле булардын биринчисинен

$$\frac{d}{dt}F(t) = F'(t) = f(t)$$

экендиги ачык көрүнүп турат. Ал эми анда

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = F'(ax+b) = a \cdot f(ax+b,)$$

же

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right] = f(ax+b)$$

болот, б. а. $\frac{1}{a}F(ax+b)$ чынында эле $f(ax+b)$ үчүн тунгуч функция болуп саналат, демек (7) формула туура.

Бул (7) формуланын $a=1$ же $b=0$ болгон учуру көп кездешет, анда (7) ден

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C; \qquad \int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C \tag{7a}$$

формулаларына ээ болобуз.

§ 4. Түздөн түз интегралдоо

Интегралдардын таблицаларына жана эрежелерине таянып, кээ бир учурда интегралдоону түздөн түз эле жүргүзүүгө болот. Мындайча интегралдоого токтоло кетебиз.

Мисалдар. 1. $\int (8x^4 - 12{,}5x^3 + 3x - 1)\,dx$.

Бул интегралды чыгаруу үчүн I жана II эрежелерди колдонобуз да, аны төмөнкүчө жазабыз:

$$\int (8x^4 - 12{,}5x^3 + 3x - 1)\,dx = 8\int x^4dx - 12{,}5\int x^3dx + 3\int xdx - \int dx =$$

$$= \frac{8}{5}x^5 - \frac{12{,}5}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + C.$$

2. $\int (2-\sqrt{x})^3\,dx = \int (8 - 12\sqrt{x} + 6x - \sqrt{x^3})\,dx) = \int 8dx -$

$$= 12\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int xdx-\int x^{\frac{3}{2}}dx = 8x - 12\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+6\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=$$

$$= 8x - 8x\sqrt{x} + 3x^2 - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C.$$

3. $$\int\frac{(x+\sqrt[4]{x})(1-\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}}dx = \int\frac{x - x\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[12]{x^{11}}}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= \int\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{7}{6}} + x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{12}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{17}\cdot x^{\frac{17}{12}} + C.$$

4. $$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C, \qquad (k \neq 0).$$

5. $$\int \cos mx dx = \frac{1}{m}\sin mx + C, \qquad (m \neq 0).$$

6. $$\int \cos^2 mx dx = \int\frac{1+\cos 2mx}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2mx + C.$$

7. $$\int \sin^2 kx dx = \int\frac{1-\cos 2kx}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2kx + C.$$

8. $$\int \operatorname{tg} x dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C.$$

9. $$\int x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

10. $$\int x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

11. $$\int\frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2 + C.$$

12. $$\int\frac{dx}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{5}\Big[\ln|x-2| -$$

$$- \ln|x+3|\Big] + C = \ln\sqrt[5]{\frac{x-2}{x+3}} + C.$$

13. $$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx =$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.$$

14. $$\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx = \int\frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int\frac{2x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx =$$

$$= 2\int\frac{dx}{1+x^2} + \int\frac{dx}{x} = 2\operatorname{arctg} x + \ln|x| + C.$$

§ 5. Өзгөрмөнү алмаштыруу аркылуу интегралдоо

Бизге $\int f(x)dx$ интегралы берилсин, мында $f(x)$ функциясынын тунгуч функциясы $F(x)$ түздөн-түз табылбасын дейлик. Мындагы x аргументи менен $x=\varphi(t)$ барабардыгы аркылуу байланышкан жаңы t өзгөрмө чоңдукту киргизебиз. $x=\varphi(t)$ барабардыгынан $t=\psi(x)$ деп t ны өзүнчө туюнтууга болот. Интеграл ичиндеги $f(x)dx$ туюнтманы жаңы өзгөрмө чоңдук t аркылуу туюнтабыз:

$$f(x)dx=f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

мында $\Phi(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, демек, $\int f(x)dx=\int \Phi(t)dt$.

Эгерде $x=\varphi(t)$ боюнча t ны алмаштыруу ыңгайлуу түрдө алынса, $\Phi(t)$ нын тунгуч функциясы түздөн-түз табылат. Интегралданып бүткөн соң, t нын ордуна анын $t=\psi(x)$ маанисин койсок, берилген $\int f(x)dx$ интегралынын x менен туюнтулган жообуна ээ болобуз:

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Мында $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$ барабардыгы *өзгөрмө чоңдукту алмаштыруу* аркылуу интегралдоо формуласы деп аталат.

Мисалдар. 1) $\int \sin^5 x\cos x\,dx=\int \sin^5 x\,d(\sin x)$ мында $t=\sin x$ десек, $\int \sin^5 x\,d(\sin x)=\int t^5dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{\sin^6 x}{6}+C.$

2) $\int (7x^3-2)^4x^2dx$ интегралын чыгаргыла. Мында $t=7x^3-2$ десек, $dt=21x^2dx$, $x^2dx=\frac{1}{21}dt$ демек, $\int(7x^3-2)^4x^2\,dx=\frac{1}{21}\int t^4dt=$

$$=\frac{t^5}{21\cdot 5}+C=\frac{(7x^3-2)^5}{105}+C.$$

3) $\int x\sqrt{x^2-3}\,dx=\frac{1}{2}\int(x^2-3)^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{2}\int(x^2-3)^{\frac{1}{2}}d(x^2-3)=$

$\left(\begin{matrix}\text{мында}\\ t=x^2-3\end{matrix}\right)$; $=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-3)^3}+C.$

§ 6. Бөлүктөп интегралдоо

Биз жогоруда $u\cdot v$ көбөйтүндүсүнүн дифференциалын эсептейбиз, анда

$$d(u\cdot v)=u\cdot dv+v\cdot du \tag{9}$$

формуласы чыгарылгандыгы белгилүү. Бул барабардыктан

$$udv=d(u\cdot v)-vdu$$

деп жазып, эки жагын тең интегралдайбыз:

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{10}$$

Ушул (10) формула бөлүктөп интегралдоо формуласы деп аталат. мындай аталышынын себеби $\int u dv$ интегралынын айрым бир бөлүгү интегралданып калат, экинчи бөлүгүн интегралдоого туура келет.

Мисалдар. 1. $\int x^2 \sin x\, dx$ интегралын эсептөө керек болсун. Мында $u=x^2$, $dv=\sin x\, dx$ десек (10) формуланы колдонууга болот. Булардан $du=2x dx$, $v=-\cos x$ экендигин аныктайбыз. Ошентип, (13) формула боюнча

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$$

Акыркы интегралга кайрадан (10) формуланы колдонобуз: $u=x$, $dv=\cos x dx$ десек, мында $du=dx$, $v=\sin x$ болот, демек

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C,$$

бул интегралды алдыңкыга коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

2) $\int \arcsin x dx$ интегралын эсептөө үчүн $u=\arcsin x$, $dv=dx$ деп алабыз. Мында $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=x$ болот. Ошентип,

$$\int \arcsin x\, dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

3) $\int e^{ax} \cos bx dx$ интегралын эсептейлик. Мында $u=e^{ax}$, $dv=$ $=\cos bx dx$ десек, $du = ae^{ax}dx$, $v = \frac{\sin bx}{b}$, демек,

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{b} \cdot e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Акыркы интегралга (10) формуланы дагы бир ирет колдонобуз. $u=e^{ax}$, $dv=\sin bx$ десек, $du = ae^{ax}\, dx$, $v = -\frac{\cos bx}{b}$ болот да, биз төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{1}{b} \cdot e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Бул интегралдын маанисин алдыңкыга коюп, төмөнкүнү табабыз:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax} \cos bx\; d x.$$

Бул барабардыктагы интегралдарды бир жагына топтойбуз:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{b^2} \cdot e^{ax} + C_1.$$

Мындан

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C. \tag{11}$$

4) Ушундай эле жол менен

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C \qquad (12)$$

экендигин да көрсөтүүгө болот. Муну далилдөөнү өзүңөргө сунуш кылабыз.

§ 7. Жөнөкөй рационалдык бөлчөктөрдү интегралдоо

Алымында да, бөлүмүндө да кандайдыр бир бүтүн көп мүчөлөр турган бөлчөк *рационалдык бөлчөк* деп аталат, алсак, $\frac{3x^2-x+1}{x^3-8}$, $\frac{2x+1}{5x^2-2x+4}$, $\frac{5x^6}{2x^2+x+2}$ рационалдык бөлчөктөр.

Аны жалпы түрдө $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ деп жазышат. Эгер $P_n(x)$ көп мүчөсүнүн даражасы $Q_m(x)$ тикинен чоң же барабар болсо, анда *буруш бөлчөк* деп, ал эми кичине болсо, *дурус бөлчөк* деп аталат. Жогорку үч бөлчөктүн биринчи экөө дурус, үчүнчүсү буруш бөлчөк. Буруш бөлчөктүн алымын бөлүмүнө бөлүп, бүтүн бөлүгүн өзүнчө жазууга болот.

$\frac{P_n(x)}{Q(x)}$ $(n<m)$ түрүндөгү дурус бөлчөктү интегралдоо анын бөлүмүнүн көбөйтүүчүлөргө ажыроосуна байланыштуу болот. Эгер $Q_m(x)=(x-a)^k\ldots(x^2+px+q)^e(k+\ldots+1+2e+\ldots+1=m)$ (мында k, e тамырларынын эселигин көрсөтөт)

түрүндө болсо, анда $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дурус бөлчөгү:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} +$$
$$+ \frac{M_e x + N_e}{(x^2+px+q)^e} + \frac{M_{e-1}x + N_{e-1}}{(x^2+px+q)^{e-1}} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} \qquad (1)$$

түрүндөгү жөнөкөй бөлчөккө ажырай тургандыгы жогорку алгебрада далилденет. Биз азырынча бөлүмү квадраттык үч мүчө болгон жөнөкөй учурун карайбыз, б. а. $\int\frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c}$ сыяктуу интегралдарга токтолобуз. Эгер $P_n(x)$, $(n\geqslant 2)$ жогорку даражадагы көп мүчө болсо, анда алымын бөлүмүнө бөлгөндөгү тийинди $T(x)$ болуп калдыгы $Mx+N$ болсо, аны:

$$\frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c} = T(x) + \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

түрүндө жазууга болот. Мындагы $T(x)$ түздөн-түз интегралданат. Ошондуктан, кийинки сыяктуу гана бөлчөктөрдү интегралдоого токтолобуз.

Бөлчөктүн бөлүмүндөгү квадраттык үч мүчө көбөйтүүчүлөргө ажыроосуна же ажырабашына жараша, аны бир аз жөнөкөйлөткөндөн кийин

$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$ интегралын: $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, $\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$, $\int \frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}\,dx$

сыяктуу интегралдардын бирине келтирүүгө болот. Алардын айрымдарын таблицалык интегралдар, айрымдарын түрдүүчө ыкмалар менен интегралдоого болот.

1-учур. Бөлчөктүн бөлүмү көбөйтүүчүлөргө ажыраса, $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ бөлчөгүн дайыма жөнөкөй эки бөлчөккө ажыратууга болот.

Мисалдар. 1. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,dx$ интегралын эсептегиле. Анын бөлүмүн: $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ көбөйтүүчүсүнө ажыратууга болот. Демек, ал бөлчөктү

$$\frac{2x+7}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \qquad (*)$$

түрүндө жазып, азырынча белгисиз A жана B коэффициенттерин изилдейбиз. Мындай ыкманы *аныктала элек коэффициенттер методу* деп аташат. A менен B ны аныктоо үчүн орток бөлүмдөн бошонуу керек: $2x+7=A(x+2)+B(x-1)$. Эми аларды эки түрдүү жол менен табууга болот.

а) Оң жаккы кашааларды ачып, окшош мүчөлөрүн топтоп, барабардыктын эки жагындагы x тин бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарласа, A жана B сыяктуу канча коэффициент болсо, ошончо теңдеме келип чыгат. Аларды система катары чыгарып, A жана B ны табууга болот. Биздин мисалда: $2x+7=(A+B)x+(2A-B)$.

Демек, $\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-B=7 \end{cases}$ системасына ээ болобуз. Анын чыгарылышы $A=3$, $B=-1$ болору ачык.

б) A жана B ны башкача жол менен дагы табууга болот. Алсак, $2x+7=A(x+2)+B(x-1)$ барабардыгында x ке бирде A нын, бирде B нын көбөйтүүчүсү нөлгө айлана турган маани бериш керек, анда экинчиси дароо табылат. Чынында эле: $x=1$ болсун десек, $9=3A$ же $A=3$, $x=-2$ болсо, $3=-3B$ же $B=-1$ табылат.

Мында табылган A жана B нын маанисин (*) га коюп, берилген интегралды төмөнкүчө интегралдайбыз:

$$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} = 3\ln|x-1| - \ln|x+2| + $$

$$+C = \ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right| + C.$$

2. $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx$ интегралын эсептегиле. Мунун бөлүмү

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ көбөйтүүчүлөрүнө ажырагандыктан, интеграл ичиндеги бөлчөк $\frac{x-4}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$ түрүндөгү жөнөкөй бөлчөккө ажырайт. A жана B ны экинчи ыкма боюнча табабыз. $x-4=A(x-3)+B(x-2)$ болгондуктан: $x=3$ десек, $-1=B$ же $B=-1$, ал эми $x=2$ десек $-2=-A$ же $A=2$ болот. Ошентип, интеграл ичиндеги бөлчөк $\frac{x-4}{x^2-5x+6}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-3}$ түрүнө келет. Эми аны интегралдоо оңой:

$$\int\frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx=2\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{x-3}=2\ln|x-2|-$$

$$-\ln|x-3|+C=\ln\left|\frac{(x-2)^2}{x-3}\right|+C.$$

3. Эми $\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}\,dx$ интегралы берилсин. Мында

$Q(x)=x(x-1)(x+1)$ болгондуктан, интеграл ичиндеги бөлчөк:

$$\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

түрүндөгү жөнөкөй бөлчөктөргө ажырайт. Мында орток бөлүмдөн бошонсок:

$$3x^2+2x-3=A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

келип чыгат. Эгер $x=0$ десек, $A=3$; $x=1$ десек, $B=1$; $x=-1$ десек, $C=-1$ табылат. Демек,

$$\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}\,dx=3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}=3\ln|x|+$$

$$+\ln|x-1|-\ln|x+1|+\ln C=\ln\left|\frac{Cx^3(x-1)}{x+1}\right|.$$

2-учур. Эми ax^2+bx+c квадраттык үч мүчө көбөйтүүчүлөргө ажырабасын дейлик, б. а. анын дискриминанты терс болсун. Мында $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$ деп жазууга болот. Эгер $x+\frac{b}{2a}=t$, $\frac{3ac-b^2}{4a^2}=k^2$ десек, $ax^2+bx+c=a(t^2+k^2)$ түрүнө келет. $dx=dt, x=t-\frac{b}{2a}$ экендигин эске алсак, $\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$ интегралын төмөнкүчө жазууга болот:

$$\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{a}\int\frac{M\left(t-\frac{b}{2a}\right)+N}{t^2+k^2}\,dt=\frac{M}{a}\int\frac{tdt}{t^2+k^2}+\frac{1}{a}\int\frac{\left(N-\frac{bM}{2a}\right)}{t^2+k^2}\,dt.$$

Акыркы интегралдар таблицалык интегралдар болгондуктан:

$$\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{M}{2a}\ln|t^2+k^2|+\frac{2aN-bM}{2a^2\cdot k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C$$

келип чыгат.

Мындагы t жана k лардын маанилерин коюп, интегралды x аркылуу туюнтууга болот.

Мисалдар. 1. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$ интегралын эсептегиле. Мында $x^2+2x+10=(x+1)^2+9$ болгондуктан, $x+1=t$ десек, $dx=dt$, $x^2+2x+10=t^2+3^2$, $5x+2=5t-3$ болот. Буларды орундарына коюп,

$$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx=\int \frac{5t-3}{3^2+t^2}dt=5\int \frac{t\,dt}{3^2+t^2}-3\int \frac{dt}{3^2+t^2}=$$

$$=\frac{5}{2}\ln|3^2+t^2|-\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C$$

экендигин көрөбүз. Мында $t^2+3^2=x^2+2x+10$, $t=x+1$ болгондуктан, акыры:

$$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx=\frac{2}{5}\ln|x^2+2x+10|-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x}+C$$

жообуна келебиз.

2. $\int \frac{dx}{x^3+8}$ интегралын эсептегиле. Мында $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$ болгондуктан,

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{A}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+4}$$

деп жаза алабыз. Орток бөлүмдөн бошонсок: $1=A(x^2-2x+4)+(Cx+D)(x+2)$ келип чыгат. Эгер $x=-2$ десек, $A=\frac{1}{12}$ табылат. Эми оң жакты кашааларды ачып, окшош мүчөлөрүн топтойбуз:

$$1=(A+C)x^2+(D-2A+2C)+4A+2D.$$

Мындан $A+C=0$, $D-2A+2C=0$, $4A+2D=1$ системасына ээ болобуз. $A=\frac{1}{12}$ болгондуктан, биринчи теңдемеден $C=-\frac{1}{12}$, үчүнчүсүнөн $D=\frac{1}{3}$ экендиги табылат. Буларды ордуна коюп чыксак:

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{x-4}{12(x^2-2x+4)}$$

келип чыгат. Аны интегралдайбыз:

$$\int \frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{12}\int \frac{dx}{x+2}-\frac{1}{12}\int \frac{x-4}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}\ln|x+2|-$$

$$-\frac{1}{12}\int \frac{x-4}{x^2-2x+4}dx.$$

Кийинкисинин бөлүмүн $x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ түрүндө жазып, $x-1=t$ дейбиз. Анда $dx=dt$, $x=t+1$, $x^2-2x+4=t^2+3$ болгондуктан:

$$\int \frac{x-4}{x^2-2x+4}\,dx = \int \frac{t-3}{t^2+3}\,dt = \int \frac{t\,dt}{t^2+3} - 3\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{2}\ln|t^2+3| -$$

$$-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Буларды ордуна коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int \frac{dx}{x^3+8} = \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4) - \frac{\sqrt{3}}{12}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} +$$

$$+ C = \frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

§ 8. Жөнөкөй иррационалдык туюнтмаларды интегралдоо

Радикалдар катышкан туюнтмаларды *иррационалдык туюнтмалар* дешет. Эгер n-даражалуу радикал ичинде $ax+b$ сыяктуу сызыктуу функция турса, анда $t=\sqrt{ax+b}$ деп алуу ыңгайлуу.

Мисалдар. 1. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$ интегралын эсептегиле. Мында $t=\sqrt[3]{3x+1}$ деп алсак, $t^3=3x+1$, $x=\frac{t^3-1}{3}$, $dx=t^2\,dt$, $x+1=\frac{t^3+2}{3}$ болот. Аларды ордуна коюп чыгабыз:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx = \int \frac{(t^3+2)\cdot t^2\,dt}{3\cdot t} = \frac{1}{3}\int (t^4+2t)\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{3} +$$

$$+C = \frac{(3x+1)\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{15} + \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{3} + C = \frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = ?$ Мында $x=t^6$ деп алуу ыңгайлуу. Анда $dx=6t^5dt$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $\sqrt{x}=t^3$ болору ачык. Демек,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^2+t^3} = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt = 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$=6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1)\right] + C = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(t+1) + C =$$

$$=2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C.$$

3. Эгер интеграл ичинде $R(x, \sqrt[n]{ax^m+b})x^{m-1}dx$, $R(x, t)$ — рационалдык функция түрүндөгү туюнтма болсо, анда $t^n=ax^m+b$ деп алуу керек. Алсак, $\int \frac{x^3\,dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$ интегралын алуу керек болсун. Мында $t^3=x^4+1$ десек, $3t^2\,dt=4x^3\,dx$, $x^3\,dx=\frac{3}{4}t^2\,dt$ болот. Демек,

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}} = \frac{3}{4}\int \frac{t^2\,dt}{t+1} = \frac{3}{4}\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{3}{4}\left[\frac{t^2}{2}-t+\right.$$

$$\left.+\ln(t+1)\right]+C = \frac{3}{4}\left[\frac{\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}{2}-\sqrt[3]{x^4+1}+\ln\left(1+\sqrt[3]{x^4+1}\right)\right]+C$$

4. Эми квадраттык үч мүчө радикал ичинде турган учуруна дагы токтоло кетели. Маселен, $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ интегралын эсептөө керек болсун. Мында $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$ десек,

$$x^2+2x+2=t^2-2tx+x^2,$$
$$2x(1+t)=t^2-2,$$
$$x=\frac{1}{2}\,\frac{t^2-2}{1+t};\quad dx=\frac{1}{2}\,\frac{t^2+2t+2}{(1+t)^2}$$

$$x+1=\frac{t(2+t)}{2(1+t)},$$
$$\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+2x+2)} = 2\int \frac{dt}{t(t+2)} = \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt = \ln t -$$

$$-\ln(t+2)+C=\ln\frac{t}{t+2}+C=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+2x+2}}{x-\sqrt{x^2+2x+2}+2}+C$$

экендигине ээ болобуз. Алымындагы иррационалдыктан кутулсак, акыркы жооп $\ln\frac{x+1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}+C$ түрүнө келет.

§ 9. Тригонометриялык функцияларды интегралдоо

Интеграл ичиндеги тригонометриялык функциялардын комбинациясына жараша интегралдоону түрлүүчө жолдор менен жүргүзүүгө болот.

1-учур. Эгер $R(\sin x)$ туюнтмасы $\sin x$ тен рационалдык функция болсо, $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ сыяктуу интегралдар $t=\sin x$ ордуна коюусу аркылуу оңой интегралданат.

Мисал. $I=\int\left(\sin^3 x-\frac{1}{2}\sin^2 x-7\right)\cos x\,dx$ интегралы $t=$ $=\sin x$ аркылуу $\int\left(t^3-\frac{t^2}{2}-7\right)dt$ түрүнө келтирилет. Демек,

$$I=\int\left(t^3-\frac{t^2}{2}-7\right)dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{6}-7t+C=\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^3 x}{6}-7\sin x+C.$$

2-учур. $R(\cos x)$ туюнтмасы $\cos x$ тен рационалдык функция болгон учурда $\int R(\cos x)\sin x dx$ интегралы $t=\cos x$ деген учурда оңой интегралданат.

Мисал. $\int \cos^3 x\sin x\,dx=-\int t^3\,dt=-\frac{t^4}{4}+C=-\frac{\cos^4 x}{4}+C.$

Мында $t=\cos x$, $dt=-\sin x dx$.

3-учур. Интеграл ичинде $\sin x$ же $\cos x$ же экөө тең жуп даражада катышса, анын даражасын

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\quad \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}\qquad (*)$$

формулалары боюнча төмөндөтүү керек.

Мисал. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ интегралын эсептегиле. Мында $\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$ болгондуктан,

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx=\int (\sin x\cos x)^2\,dx=\int \frac{\sin^2 2x}{4}\,dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx=$$
$$=\frac{1}{8}\int\Big(1-\cos 4x\Big)dx=\frac{1}{8}\Big(x-\frac{\sin 4x}{4}\Big)+C.$$

4-учур. $\int \cos^m x\sin^n x dx$ интегралында m менен n дин бири так болсо, ошонун бир көбөйтүүчүсүн бөлүп жазып, калган жуп даражаларда анын *кофункциясын* жаңы өзгөрмө менен белгилөө керек.

Мисал. $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx=?$
Аны $\int \sin^2 x\cos^2 x\cdot\cos x dx=\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)$ деп жазып, $t=\sin x$ десек, $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx=\int t^2\Big(1-t^2\Big)dt=\int\Big(t^2-t^4\Big)\,dt=$
$$=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$$
келип чыгат.

5-учур. $\int \sin^{2n+1}x dx$, $\int \cos^{2n+1}x dx$ сыяктуу интегралдарды, $\int \sin^{2n}x\cdot\sin x\,dx$, $\int \cos^{2n}x\cdot\cos x dx$ деп жазып алып, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ формуласын колдонсок, 1- же 2-учурга келебиз.

Мисал. $\int \sin^5 x dx=\int \sin^4 x\cdot\sin x dx=\int (1-\cos^2 x)^2\times\times\sin x dx=\int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\,dx=[t=\cos x]=-\int (1-2t^2+t^4)dt=-\Big(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{t^5}{5}\Big)+C=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C.$

6-учур. $\int \sin px\cos qx\,dx$, $\int \cos px\cos qx\,dx$, $\int \sin px\sin qx\,dx$ сыяктуу интегралдар:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big],$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\Big],$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big]$$

формулаларынын жардамы менен эсептелет.

Мисалдар. 1. $\int \sin 3x\sin 5x\,dx=?$
Жогорку формулалардын биринчиси боюнча:

$$\int \sin 3x\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}\int\Big(\cos 2x-\cos 8x\Big)dx=\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 8x}{16}+C.$$

2. $$\int \sin\Big(5x-\frac{\pi}{4}\Big)\cos\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)dx=\frac{1}{2}\int\Big[\sin 6x+\sin\Big(4x-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\Big[\sin 6x-\cos 4x\Big]dx=-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\sin 4x}{8}+C.$$

7-учур. $\int \mathrm{tg}^n x\,dx$ ($n>0$ же $n<0$ жуп сан) түрүндөгү интеграл $z=\mathrm{tg}x$ ордуна коюу формуласы менен интегралданат.

Мисал. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^2 x} = ?$ Эгер $z=\mathrm{tg}x$ десек $x=\mathrm{arctg}z$, $dx=\frac{dz}{1+z^2}$.

Демек $\int \frac{dz}{(1+z^2)z^2}$ келип чыгат. Мында $\frac{1}{z^2(1+z^2)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{1+z^2}$ болорун байкоо кыйын эмес. Ошондуктан,

$$\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^2 x} = \int \frac{dz}{z^2(1+z^2)} = \int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{z} - \mathrm{arctg}\, z + $$
$$+ C = -\frac{1}{\mathrm{tg}\, x} - x + C$$

экендиги келип чыгат.

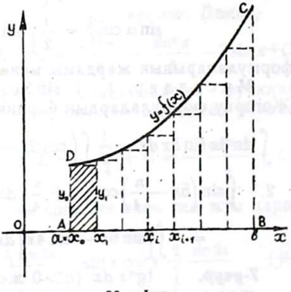
XII глава. АНЫКТАЛГАН ИНТЕГРАЛ

§ 1. Аныкталган интегралдын түшүнүгүнө келтириле турган маселелер

1. Ийри сызыктуу трапециянын аянтын эсептөө. Бизге жогору жагынан $y=f(x)$ функциясы, эки капталынан $x=a$ жана $x=b$ түз сызыктары, ал эми төмөн жагынан OX огу менен чектелген $ABCD$ жалпак фигура берилсин (83-чийме). Мында функциясы $[a, b]$ сегментинде аныкталган жана үзгүлтүксүз деп эсептелет. $ABCD$ фигурасын негизи $[a, b]$ сегменти болгон ийри сызыктуу трапеция деп айтабыз. Мына ушул ийри сызыктуу трапециянын аянтын P менен белгилеп, аны эсептейбиз. Бул аянтты эсептөө үчүн $[a, b]$ сегментин өз ара барабар эмес n бөлүккө бөлөбүз. Бул бөлүү чекиттерин

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b \qquad (1)$$

менен белгилейлик. Ар бир $x_0, x_1, \ldots, x_n$ бөлүү чекиттеринде OX огуна перпендикулярлар тургузабыз да, аларды $y=f(x)$ ийри сызыгы менен кесилишкиче созобуз, анда берилген ийри сызыктуу трапеция негиздери түрлүү узундукта болгон n тилкечеге, тагыраак айтканда n кичине ийри сызыктуу трапецияга бөлүнөт. Ар бир тилкенин, айталык сол жакки ординаталарынын учтарынан OX огуна параллель сызыктар жүргүзөбүз да, аларды оң жакки ординаталары же алардын уландысы менен кесилишкенге чейин созобуз. Натыйжада баскычтуу тик бурчтуктардан түзүлгөн фигурага ээ болобуз. Ар бир тик бурчтуктун аянтын таап, алардын суммасын алсак, ушул баскычтуу көп бурчтуктун аянтын



83-чийме

тапкан болобуз. Мында 1-тик бурчтуктун аянты $y_0 \cdot (x_1 - x_0)$, экинчисиники $y_1 \cdot (x_2 - x_1)$ ж. б. болот. Баскычтуу көп бурчтуктун аянты берилген ийри сызыктуу трапециянын аянтына жакындашуу менен барабар болсун десек, биз бир аз ката кетирген болор элек, ошентип,

$$P \approx y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_i(x_{i+1} - x_i) + \ldots + y_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1}).$$

Мында $y_i = f(x_i)$ экендигин эске алып жана

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i \tag{2}$$

деп белгилесек, анда

$$P \approx f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \ldots + f(x_i) \cdot \Delta x_i + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} \tag{3}$$

болот, бул сумманы символдук түрдө

$$P \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x_i \tag{3а}$$

деп жазабыз. Мында i нин ордуна $i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ маанилерин коюп чыксак, ирети менен (3) сумманын 1-, анан 2-, 3-, ж. б. кошулуучуларына ээ болобуз.

Эми жогорудагы n тилкеченин ар бирин дагы майда бөлүктөргө бөлсөк, б. а. (1) бөлүү чекиттеринин санын чексиз көбөйтсөк анда (3а) суммасы ийри сызыктуу трапециянын аянтына ошончолук жакын маани берет. Ошол $[a, b]$ сегменти бөлүнгөн n бөлүктүн, б. а. n тилкеченин негиздеринин ичинен эң чоңун λ менен белгилейбиз:

$$\lambda = \max\{\Delta x_i\}. \tag{4}$$

Жогорудагы (1) бөлүү чекиттеринин саны чексизге умтулганда бул $\lambda \to 0$ белгилүү. Ошентип ийри сызыктуу трапециянын аянтын так табуу үчүн (3а) суммасынын $\lambda \to 0$ кездеги пределин табуу керек:

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{0=i}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i. \tag{5}$$

Биз жогоруда ар бир тик бурчтуктун аянтын эсептөөдө алардын бийиктиги үчүн сол жакқы ординаталарын кабыл алдык. Чындыгында бийиктик үчүн ар бир тилкенин оң жакқы ординаталарын да алууга болот, анда (5) нин ордуна

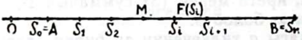
$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \cdot \Delta x_i \tag{5а}$$

барабардыгына ээ болмокпуз. Ал эми тик бурчтуктун ар бир $[x_i, x_{i+1}]$ негизинен эриктүү түрдө бирден $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ чекитин алып, тик бурчтуктун бийиктиги үчүн $f(x)$ функциясынын ушул чекиттеги $f(\xi_i)$ маанисин алууга да болот, анда биз

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{5б}$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул үч барабардык тең ийри сызыктын аянтынын так маанисин берет.

2. Механикалык жумушту эсептөө. Материалдык M чекити түз сызык боюнча кыймылга келсин, мында A чекитинен B га чейин жылышуусуна $\vec{F}$ күчү таасир этсин. Бул F турактуу болсо, аткарылган жумуш $F \cdot S$ болору белгилүү. Ушул F күчү турактуу болбой бир чекиттен экинчисине өткөндө, тынымсыз өзгөрүп турган учурда аткарылган жумушту аныктоо талап кылынсын. Материалдык чекит түз сызык боюнча A чекитинен B чекитине чейин жылышсын. Ушул чекит өткөн S жолу көз каранды эмес чоңдук болсун, анда $F=F(S)$ болот. Башталгыч A чекитине $s=s_0$ мааниси, ал эми акыркы B чекитине $s=S$ мааниси туура келсин. $[A, B]$ аралыгын $S_0<S_1<S_2< \dots <S_i< \dots <S_n=S$ чекиттери аркылуу өз ара барабар эмес n бөлүккө бөлөбүз (84-чийме). Мында $[s_0, S]$ аралы-



84-чийме

гындагы ар бир S_i маанисине кыймылга келген чекиттин белгилүү бир абалы туура келсин жана ага F күчүнүн дагы белгилүү бир $F(S_i)$ мааниси туура келсин. AB аралыгындагы бардык жумушту табуу үчүн ар бир $[S_i, S_{i+1}]$ аралыктагы күчтөрдүн таасири астында аткарылган жумуштардын суммасын аныктоо керек, бул сумма чыныгы жумуштун чамалуу маанисин берет. Жумушту W деп белгилесек, анда

$$W \approx F(s_0)\cdot(s_1-s_0)+F(s_1)(s_2-s_1)+\dots+F(s_i)(s_{i+1}-s_i)+ \\ +\dots+F(s_{n-1})(s_n-s_{n-1}). \quad (6)$$

Эгерде $\Delta s_i=S_{i+1}-S_i$ десек,

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} F(S_i)\,\Delta S_i \quad (6a)$$

суммасына ээ болобуз. $[A, B]$ сегменти канчалык майда бөлүккө бөлүнсө, б. а. n чексиз чоңойсо, жумушту (6а) суммасы менен эсептегенде кетирилген каталык ошончолук кичине болот. Механикалык жумуштун так маанисин табуу үчүн

$$\lambda=\max\{\Delta S_i\} \quad (4a)$$

деп белгилеп, (6а) нын $\lambda \to 0$ дагы пределин табуу керек:

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} F(S_i)\,\Delta S_i. \quad (7$$

§ 2. Аныкталган интегралдын түшүнүгү

$f(x)$ функциясы кандайдыр бир $[a, b]$ аралыгында аныкталган үзгүлтүксүз функция болсун. a жана b чекиттеринин арасына (1) бөлүү чекиттерин эриктүү түрдө жайгаштырып, $[a, b]$ аралыгын бирдей эмес n бөлүккө бөлөбүз.

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i=0, 1, 2, \dots, n-1)$ айырмаларынын ичинен эң чоңун λ менен белгилейбиз.

Ар бир $[x_i, x_{i+1}]$ сегментчелеринин ичинен эрктүү түрдө бирден $x=\xi_i$ чекитин алабыз: $x_i \leqslant i \leqslant x_{i+1}$ $(i=0, 1, 2, \dots, n-1)$ функциянын ушул чекиттердеги маанилерин $f(\xi_i)$ таап аларды тиешелүү Δx_i лерге көбөйтөбүз: $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Эми

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \tag{8}$$

суммасын түзөбүз. Ушул сумманын

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \tag{9}$$

чектелген пределин жөнүндөгү түшүнүктү түзөбүз.

Бул пределди «ε—δ» тилинде да аныктоого болот. Эгерде ар бир $\varepsilon > 0$ саны үчүн $\lambda < \delta$ болгондо гана (б. а. негизги аралык узундугу $\Delta x_i < \delta$ дан кичине бөлүктөргө бөлүнгөндө гана)

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы ξ_i чекиттерин каалашыбызча тандап алганда орун алса, анда σ суммасы $\lambda \to 0$ кезде I пределине ээ болот.

Аныктама. *Эгерде $\lambda \to 0$ да σ суммасынын чектелген I предели бар болсо, б. а. негизги аралыкты кандай бөлүүгө жана алардагы ξ_i чекиттерин кандайча тандап алууга карабастан σ суммасы дайыма бир гана I пределине умтулса, анда ал пределди $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ сегментиндеги* **аныкталган интегралы** *деп аташат да*

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_a^b f(x)\,dx \tag{10}$$

деп белгилешет. Мында a интегралдын төмөнкү предели деп, b болсо жогорку предели деп аталат, ал эми $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу функция деп аталат. Алдыдагы (8) деги σ болсо, *интегралдык сумма* деп аталат. a менен b турактуу болсо, аныкталган интеграл турактуу сан болот.

(10) дагы аныкталган интегралдын бар болушу үчүн барыдан мурда интегралдын ичиндеги $f(x)$ функциясы чектелген функция болушу зарыл экендигин белгилей кетебиз. Чындыгында эле эгерде $f(x)$ чектелбеген функция болсо, анда (8) сумманын ошол функция чектелбеген бөлүгүнө туура келүүчү кошулуучулары мааниси жагынан эң чоң болушат эле да, натыйжада (9) предел чек-

телген мааниге ээ болбойт эле, ошентип чектелбеген функциянын аныкталган интегралы болбойт. Эми жогорку маселелерге кайра кайрылабыз. Аныктама боюнча (5 б) формуласынан $P = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, ал эми (7) ден $W = \int\limits_{s_0}^{s} F(S)\,ds$ аныкталган интегралдарына ээ болобуз.

Ошентип, ийри сызыктуу трапециянын аянты $f(x)$ тин $[a, b]$ сегментиндеги аныкталган интегралына барабар, ал эми $F(S)$ күчү M чекитин AB аралыгына жылдырган кезде, аткарылган жумуш болсо $\int\limits_{s_0}^{s} F(S)\,ds$ аныкталган интегралына барабар.

Каалагандай эле $f(x)$ функциясы интегралдана бербейт. Ал эми $[a, b]$ туюк сегментинде үзгүлтүксүз болгон ар кандай функция үчүн аныкталган интеграл бар болот, б. а. үзгүлтүксүз функциялар интегралдануучу болушат.

Ошондой эле, $[a, b]$ туюк сегментинде чектүү сандагы чекиттерде чектүү үзүлүшкө ээ болгон функция дагы ал сегментте интегралдануучу функция болорун көрсөтүүгө болот.

Бул айтылгандарды далилдөөсүз эле кабыл алабыз.

§ 3. Жогорку предели өзгөрүүчү аныкталган интеграл

Эң мурда аныкталган интегралдын мааниси интегралдоочу өзгөрмөнү белгилөөдөн көз каранды эместигин белгилей кетебиз, б. а.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(S)\,ds = \dots, \tag{17}$$

анткени булардын бардыгы бир эле ийри сызыктуу трапециянын аянтын туюнтат. Демек, аныкталган интегралдын алдындагы функцияга карата өзгөрүлөт.

Аныкталган интегралдын түшүнүгүн түзүүдө биз интегралдоо пределдерин турактуу деп кабыл алдык. Кээде пределдери өзгөрүүчү интегралдарды кароого туура келет. Биз жогорку предели x болгон $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ интегралын карайлык. Бул интеграл $f(x)$ функциясынын графигинин $[a, x]$ сегментине туура келген бөлүгү, чектеген ийри сызыктуу трапециянын аянты болот. Эгер x өзгөрсө, ал трапециянын аянты дагы өзгөрөт, демек аны x тен функция деп кароого болот:

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt. \tag{18}$$

Мындай интегралды *жогорку предели өзгөрүүчү* интеграл деп аташат.

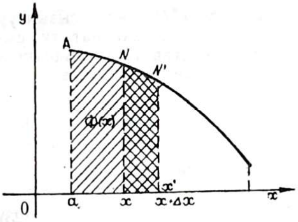
Теорема. *Эгер жогорку предели өзгөрүүчү интегралдын ичиндеги функция үзгүлтүксүз болсо, анда ал интегралдын жогорку предели боюнча туундусу интеграл ичиндеги функциянын ошол пределдеги маанисине барабар,* б. а.

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x=f(x) \tag{19}$$

Д а л и л д ө ө. Шарт боюнча $f(t)$ үзгүлтүксүз. Геометриялык жактан (18) интеграл, жогору жагынан $y=f(x)$ тин графиги, эки капталынан aA жана xN ординаталары, төмөн жагынан $[a, x]$ сегменти менен чектелген $aANx$ ийри сызыктуу трапециянын аянтын туюнтат. Эгер x ке Δx өсүндүсүн берсек, анда

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \tag{20}$$

интегралы эми $aAN'x'$ ийри сызыктуу трапециянын аянтын туюнтат (85-чийме).



85-чийме

$aAN'x'$ жана $aANx$ трапециялардын айырмасы эки кабат штрихтелген аянтты, б. а. $\Delta\Phi$ ни туюнтат:

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x).$$

$f(x)$ функциясынын $[x, x+\Delta x]$ сегментиндеги эң кичине мааниси m, эң чоң мааниси M болсун. $\Delta\Phi$ нин аянтын, негиздери Δx болуп, ал эми бийиктиктери m жана M болгон тик бурчтуктардын аянттары менен салыштырып:

$$m\cdot\Delta x\leqslant\Delta\Phi\leqslant M\cdot\Delta x$$

экендигине ээ болобуз. Бул барабарсыздыктын бардык мүчөлөрүн Δx ке бөлсөк:

$$m\leqslant\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}\leqslant M$$

келип чыгат. $\Delta x\to 0$ пределге өтсөк,

$$m\leqslant\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}\leqslant M \quad \text{же} \quad m\leqslant\Phi'(x)\leqslant M$$

болору ачык. Шарт боюнча $f(x)$ функциясы $[x, x+\Delta x]$ сегментинде үзгүлтүксүз болгондуктан, ал эң кичине m жана эң чоң M маанилеринин арасындагы $\Phi'(x)$ маанисине кандайдыр бир x чекитинде жетишет, б. а. $\Phi'(x)=f(x)$ болот. Ошентип, $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x)$

экендиги далилденди.

§ 4. Аныкталган жана аныкталбаган интегралдар арасындагы байланыш.

Алдыдагы (19) формула, жогорку предели өзгөрмө $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ интегралы $f(x)$ функциясы үчүн тунгуч функция болорун көрсөтүп турат. Ал эми $F(x)$ ошол эле $f(x)$ функциясы үчүн каалагандай тунгуч функция болсо, ал $\Phi(x)$ тен турактуу чондукка гана айырмаланары белгилүү:

$$\Phi(x)=F(x)+C \tag{21}$$

Мындагы C турактуу чоңдугун аныктоо үчүн (18) формулада $x=$ $=a$ болсун дейлик, анда $\Phi(a)=\int\limits_a^a f(t)\,dt=0$ болору ачык, анткени $x\to a$ умтулуп a менен дал келишкенде $aANx$ ийри сызыктуу трапециясы куушурулуп отуруп, aA түз сызыгына айланат, түз сызыктын аянты нөл экендиги белгилүү. Ошентип (21) шартынан $\Phi(a)=F(a)+C=0$ экендигин аныктайбыз. Демек, (21) ден:

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a) \tag{22}$$

формуласына ээ болобуз. Мындан $x=b$ болсун десек,

$$\Phi(b)=\int\limits_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a) \tag{23}$$

формула келип чыгат. Бул **Ньютон-Лейбництин формуласы** деп аталат. Ошентип, аныкталган интегралды эсептөө үчүн, интеграл ичиндеги функциянын каалагандай тунгуч функциясын аныктап, анын жогорку b пределиндеги жана төмөнкү a пределиндеги маанилеринин айырмасын табуу жетиштүү болот. (7) формуланы, көбүнчө

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b \tag{23a}$$

түрүндө жазышат.

Мисалдар. 1. $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0^\circ=$

$=1+1=2.$

2. $\int\limits_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}.$

§ 5. Аныкталган интегралдын касиеттери

1. Төмөнкү жана жогорку интегралдоо пределдерин алмаштырганда, аныкталган интегралдын белгиси карама-каршысына өзгөрөт.

Чынында эле (7) боюнча $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Ошондой эле: $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$. Мындан

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{11}$$

экендиги ачык көрүнүп турат.

2. Эгер c чекити $[a, b]$ сегментинин ички чекити $(a<c<b)$ болсо, анда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{12}$$

барабардыгы орундалат.

Далилдөө. Шарт боюнча $[a, b] = [a, c] + [c, b]$, $a<c<b$ жана $F'(x) = f(x)$. Демек, (7) боюнча:

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a) \text{ жана } \int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c).$$

Буларды мүчөлөп кошуп:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

же

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

формуласына, б. а. (12) га ээ болобуз.

Эскертүү. 1) Бул (12) формула эки гана эмес, $[a, b]$ сегменти бөлүнгөн чектүү сандагы аралыктар үчүн дагы аткарылат.

2) Ал (12) формула, эгер c чекити $[a, b]$ сегментинин ичинде эмес, анын сыртында жаткан жана $f(x)$ функциясы $[a, c]$ жана $[b, c]$ сегменттеринде үзгүлтүксүз болгон учурда да орундаларын оңой эле далилдөөгө болот.

3. Турактуу көбөйтүүчүнү интеграл белгисинин сыртына чыгарууга болот, б. а.

$$\int_a^b A \cdot f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx \tag{13}$$

барабардыгы орундалат.

Далилдөө. Шарт боюнча $A = const$, $F'(x) = f(x)$. Демек, $[A \cdot F(x)]' = A \cdot f(x)$ болгондуктан,

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A \cdot F(b) - A \cdot F(a) = A\Big[F(b) - F(a)\Big] = A \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

4. *Чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын алгебралык суммасынын аныкталган интегралы, ошол функциялардын аныкталган интегралдарынын алгебралык суммасына барабар, б. а.*

$$\int_a^b [f(x) + g(x) - \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (14)$$

барабардыгы орундалат.

Далилдөө. $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$, $\Phi'(x) = \varphi(x)$ болсо:

$$\int_a^b [f(x) + g(x) - \varphi(x)]\,dx = [F(b) + G(b) - \Phi(b)] - [F(a) + G(a) -$$

$$- \Phi(a) = [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] - [\Phi(b) -$$

$$- \Phi(a)] = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

болот да, теорема далилденет.

5. (Орточо маани жөнүндө теорема). *Үзгүлтүксүз функциянын аныкталган интегралы, интегралдоо аралыгынын узундугу менен интеграл ичиндеги функциянын кандайдыр бир арадагы аргументтеги маанисинин көбөйтүндүсүнө барабар,* б. а.

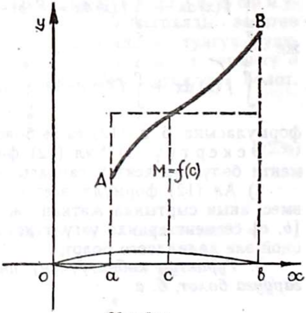
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a) \qquad (15)$$

барабардыгы орундалат, мында $a < c < b$.

Далилдөө. $F'(x) = f(x)$ болсун, анда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

оң жаккы айырмага Лагранждын чектүү өсүндү жөнүндөгү теоремасын колдонуп: $F(b) - F(a) = (b - a) \cdot F'(c) = (b - a) \cdot f(c)$, $a < c < b$ экендигине ээ болобуз. Ошентип, чынында эле (15) орундалып теорема далилденет. $f(x) \geqslant 0$ болсун десек, (15) формуланы геометриялык жактан 86-чиймедегидей талкуулоого болот. Ошен-



86-чийме

тип, $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянтын, негизи $b-a$, бийиктиги $\mu=f(c)$ орточо маани болгон, кандайдыр бир тик бурчтуктун аянты менен алмаштырууга болот.

Мындагы $\mu=f(c)$ саны $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ аралыгындагы *орточо мааниси* деп аталат. Анын маанисин (12) ден аныктасак:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{16}$$

болот.

Мисалдар. 1. $f(x)=x^3$ функциясынын $[0, 2]$ сегментиндеги μ орто маанисин аныктагыла.

Алдыңкы (13) формула боюнча:

$$\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 2.$$

2. $f(x)=\cos x$ функциясынын $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ сегментиндеги орточо маанисин эсептегиле. Бул сапар

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{\pi}\cdot\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}.$$

§ 6. Бөлүктөп интегралдоо

Бизге $[a, b]$ сегментинде аныкталган $u=u(x)$ жана $v=v(x)$ дифференцирленүүчү функциялары берилсин. Алардын көбөйтүндүсүнүн дифференциалы:

$$d[u(x)\cdot v(x)]=u(x)dv(x)+v(x)du(x) \tag{24}$$

түрүндө туюнтулары белгилүү. Аны a дан b га чейин интегралдасак:

$$u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du$$

келип чыгат. Мындан

$$\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \tag{25}$$

формуласына ээ болобуз. Бул аныкталган интеграл үчүн бөлүктөп интегралдоо формуласы болот.

Мисалдар. 1. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ интегралын эсептегиле. Мында

Мында $u = \arcsin x$, $dv = \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ десек, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$v = 2\sqrt{1+x}$ болот. Демек $\int_0^1 \arcsin x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \arcsin x \times$

$$\times 2\sqrt{1+x}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}}dx = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\pi + 4\sqrt{1-x}\Big|_0^1 = \sqrt{2}\cdot\pi - 4.$$

2. $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$ интегралын эсептегиле. Аны $\int_0^1 \ln(1+x^2)\cdot x\,dx$ түрүндө жазып, $u = ln(1+x^2)$, $dv = xdx$ десек, $du = \frac{2x}{1+x^2}dx$, $v = \frac{x^2}{2}$ болот. Демек,

$$\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx = \ln(1+x^2)\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{\ln 2}{2} -$$

$$-\int_0^1\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

§ 7. Аныкталган интегралда өзгөрмө чоңдукту алмаштыруу

$\int_a^b f(x)\,dx$ аныкталган интегралынын ичиндеги функциянын тунгуч функциясын табуу, бир кыйла кыйынчылыкты түзгөн учурда $x = \varphi(t)$, $(\alpha \leqslant b \leqslant \beta)$ формуласы аркылуу эски x өзгөрмөсүн жаңы t өзгөрмөсү менен алмаштырууга туура келет, мында $\varphi(t)$ функциясы $[\alpha, \beta]$ сегментинде t боюнча дифференцирленүүчү функция болсун. Эгер $t = \alpha$ га $x = \varphi(\alpha) = a$, ал эми $t = \beta$ га $x = \varphi(\beta) = b$ туура келсе, ал эми $y = f[\varphi(t)]$ татаал функциясы t боюнча $[\alpha, \beta]$ сегментинде дифференцирленүүчү функция болсо, анда аныкталбаган интегралдагы сыяктуу эле:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \tag{26}$$

формуласы орун алат.

Мисалдар. 1. $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$ интегралын эсептегиле. Радикалдан кутулуу максатында, $\sqrt{1+x}=t$, б. а. $1+x=t^2$ дейбиз. Анда $dx=2tdt$, $x=t^2-1$ болуп, $x=3$ болгондо, $t=2$, ал эми $x=8$ болгондо, $t=3$ болору ачык. Ошентип,

$$\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2\int\limits_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot t\,dt}{t} = 2\int\limits_2^3 (t^2-1)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_2^3 = \frac{32}{3}$$

экендигине ынанабыз.

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ интегралын эсептегиле. Мында тригонометриялык функциялардын арасындагы $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ формуласынан пайдаланабыз да, $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ деп алабыз.

Анда $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg} z$, $dx=\frac{2\,dz}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ болору ачык.

Мындагы $z=tg\,\frac{x}{2}$ боюнча $x=0$ болсо, $z=0$, ал эми $x=\frac{\pi}{2}$ болсо, $z=1$ болорун байкайбыз. Демек,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \int\limits_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\cdot\frac{2\,dz}{1+z^2} = 2\int\limits_0^1 \frac{dz}{z^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

келип чыгат.

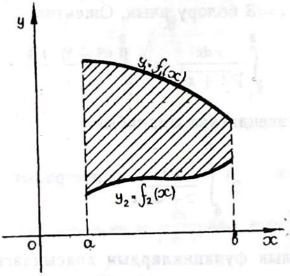
§ 8. Аныкталган интегралдын геометриялык колдонулуштары

1. Аянтты тик бурчтуу координаталарда эсептөө. Аныкталган интегралды аныктаган кезде $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралы, $[a, b]$ негизи Ox

огунда жаткан, үстү жагынан $y=f(x)$ ийри сызыгы, ал эми капталдарынан $x=a$, $x=b$ сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын P аянтын туюнтарын көргөн элек. Кээде үстү жагынан дагы, төмөн жагынан дагы түрдүү ийри сызыктар менен чектелген жалпак фигуранын аянтын табууга туура келет (87-чийме). Мында изделген, штрихтелген аянтты аныктоо үчүн $y_1=f_1(x)$ ийри сызыгы менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянтынан $y_2=f_2(x)$ сызыгы менен чектелген трапециянын аянтын кемитүү керектиги 84-чиймеден ачык көрүнүп турат:

$$P_1=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b (y_1-y_2)\,dx. \qquad (27)$$



87-чийме

Кээде бул $y_1=f_1(x)$ жана $y_2=f_2(x)$ ийри сызыктары өз ара кесилишип да калышат. Алсак, алар $M_1(x_1, y_1)$ жана $M_2(x_2, y_2)$ чекиттеринде кесилишсе, анда аянт $P_1=\int_{x_1}^{x_2}(y_1-y_2)dx$ интегралы аркылуу эсептелет.

Айрым учурда, негизи Oy огунда жатып, ал асты үстүнөн $y=c$ жана $y=d$ түз сызыктары менен, каптал жагынан $x=\varphi(y)$ ийри сызыгы менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянтын эсептөө керек болуп калат. Мындай жалпак фигуранын аянты:

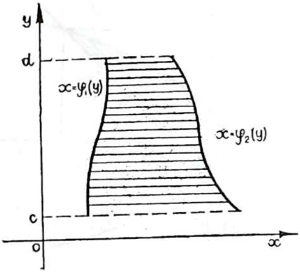
$$P=\int_c^d \varphi(y)\,dy \qquad (28)$$

интегралы менен эсептелет (88-чийме).

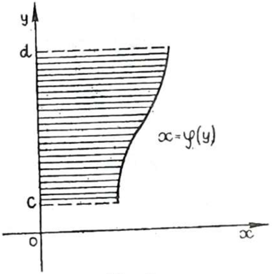
Эгер фигура эки капталынан $x_1=\varphi_1(y)$ жана $x_2=\varphi_2(y)$ ийри сызыктары менен чектелсе, анда анын аянты:

$$P=\int_c^d [\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]\,dy \qquad (29)$$

интегралы боюнча эсептелет (89-чийме).



88-чийме



89-чийме

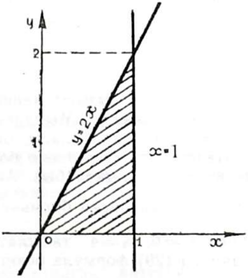
Мисалдар. 1. $y=2x$ жана $x=1$ түз сызыктары жана OX огу аркылуу чектелген үч бурчтуктун аянтын эсептегиле (90-чийме).

$$\text{Ал аянт: } P=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1 2x\,dx=x^2\Big|_0^1=1 \text{ (аянт бирдик)}$$

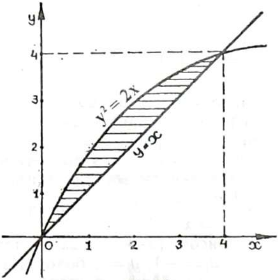
болот. Негизи 2, бийиктиги 4 болгон үч бурчтуктун аянты 4 квадраттык бирдикке барабар экендиги геометриядан бизге белгилүү болгон $\frac{1}{2}ab$ формуласынан дале келип чыгарын ачык көрүп турасыңар.

2. $y^2=4x$ параболасы жана $y=x$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

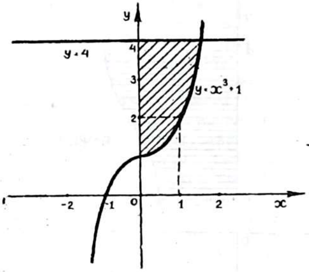
Эң мурда алардын кесилишкен чекиттерин табабыз, ал үчүн бул эки теңдемени бириктирип, система катары чыгаруу керек. Экинчисин биринчисине койсок, $x^2=4x$ болуп, мындан $x_1=0$, $x_2=4$ чыгарылыштарына ээ болобуз (91-чийме). Демек, изделген аянт:



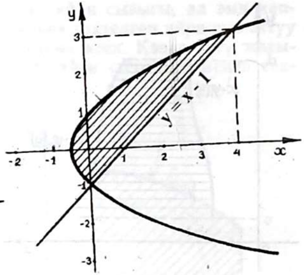
90-чийме



91-чийме



92-чийме



93-чийме

$$P=\int_0^4 (y_1-y_2)\,dx=\int_0^4 (2\sqrt{x}-x)\,dx=2\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx-\int_0^4 x\,dx=$$

$$=2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4-\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4=\frac{4}{3}\cdot 8-8=\frac{8}{3}\ \text{(аянт бирдик).}$$

3. $y=x^3+1$ ийри сызыгы, $y=4$ түз сызыгы жана Oy огу менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле (92-чийме).

Бул сапар аянтты (27) формула боюнча эсептөө керек. Мында $c=1$, $d=4$ экендиги көрүнүп турат, ал эми $x=\sqrt[3]{y-1}$ болот. Демек,

$$P=\int_1^4 \sqrt[3]{y-1}\,dy=\int_1^4 (y-1)^{\frac{1}{3}}dy=\frac{(y-1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_1^4=\frac{3}{4}\cdot 3\sqrt[3]{3}=$$

$$=\frac{9\sqrt[3]{3}}{4}\ \text{(аянт бирдик).}$$

4. $y^2=2x+1$ параболасы жана $x-y-1=0$ түз сызыгы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле (93-чийме). Мындагы штрихтелген фигураны сол жагынан $y^2=2x+1$ параболасы, оң жагынан $y=x-1$ түз сызыгы менен чектелген деп эсептөөгө болот. Бул эки сызыктын кесилишкен чекиттерин аныктайбыз. Ал үчүн $\begin{cases} y^2=2x+1, \\ y=x-1 \end{cases}$ системасын чыгаруу керек. Экинчисин биринчисине койсок, $(x-1)^2=2x+1$ теңдемесинен $x_1=0$, $x_2=4$ табылат. Демек, $y_1=-1$, $y_2=3$ болот. Изделген аянтты (29) формула боюнча табуу ыңгайлуу. Мында

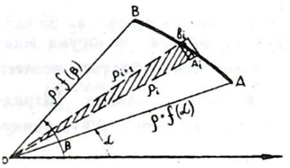
$$P=\int\limits_{-1}^{3}(x_2-x_1)\,dy=\int\limits_{-1}^{3}\left[(y+1)-\frac{y^2-1}{2}\right]dy=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3}(3+2y-$$

$$-y^2)\,dy=\frac{1}{2}\left[3y+y^2-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3}=5\frac{1}{3}\text{ (аянт бирдик).}$$

2. Аянтты уюлдук координаталарда эсептөө. Эми уюлдук координаталар системасында $\rho=f(\varphi)$ тендемеси менен кандайдыр бир ийри сызык берилсин. Ушул ийри сызык жана OA, OB радиус-векторлору менен чектелген ийри сызыктуу сектордун аянтын эсептөө керек болсун. Тендемедеги φ аргументи $[\alpha, \beta]$ сегментинде өзгөрсүн.

$$\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_i<\varphi_{i+1}<\ldots<\varphi_n=\beta$$

бурчтары боюнча $\rho=f(\varphi)$ ийри сызыгы менен кесилишкенге чейин радиус-векторлор жүргүзүп, $OABO$ ийри сызыктуу секторун элементардык секторлорго бөлөбүз (94-чийме). Алардын ичинен борбордук бурчу $\Delta\varphi_i=\varphi_{i+1}-\varphi_i$ болгон секторду борбордук бурчу ошол эле $\Delta\varphi_i$ болгон, радиусу $\rho=f(\varphi)$ функциясынын $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ сегментиндеги кандайдыр бир орточо $\rho_i=f(\varphi_i)$ мааниси болгон OA_iB_iO тегерек сектор менен алмаштырабыз (94-чийме). Мында $\Delta\varphi_i$ бурчу радиан менен туюнтулгандыгын эске алсак, OA_iB_iO тегерек секторунун аянты:



94-чийме

$$OA_iB_iO_{\text{сек аянт}}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{A_iB_i}\cdot\rho_i=\frac{1}{2}\rho_i^2\cdot\Delta\varphi_i\text{ болот, анткени }\overset{\frown}{A_iB_i}=\rho_i\cdot\Delta\varphi_i$$

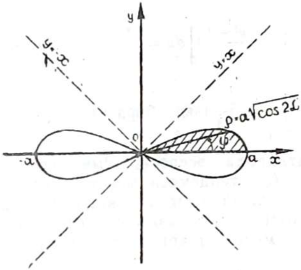
экендиги белгилүү. Мында $\rho_i^2=f^2(\varphi_i)$ экендигин эске алып, ушул сыяктуу секторлордун аянттарын суммаласак, берилген $OABO$ ийри сызыктуу трапециянын жакындатылган аянтына ээ болобуз:

$$P\approx\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}f^2(\varphi_i)\cdot\Delta\varphi_i.$$

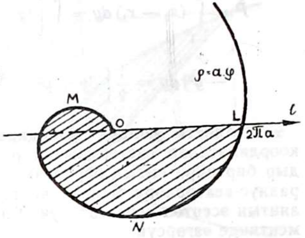
Мындагы оң жакки сумма $F(\varphi)=\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ үзгүлтүксүз функциясы үчүн интегралдык сумма болуп саналат. Ошондуктан $\lambda=\max\{\Delta\varphi_i\}$ деп белгилеп, $\lambda\to 0$ кезде пределге өтсөк, изделген аянттын так мааниси:

$$P=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}f^2(\varphi)\,d\varphi \tag{30}$$

аныкталган интегралы менен туюнтуларына ынанабыз, мында $\rho=f(\varphi)$ ийри сызыкты туюнтуучу берилген функция.



95-чийме



96-чийме

Мисалдар. 1. $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ теңдемеси аныктаган ийри сызык менен чектелген фигуранын — Лемпискатанын аянтын эсептегиле (95-чийме).

φ аргументине: $\varphi=0,\ \frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{10},\ \frac{\pi}{8}$ ж. б. маанилерин берип, тиешелүү ρ лорду таап, алар боюнча ийри сызыкты түзсөк, ал 95-чиймедегидей окторго карата симметриялуу фигура болоруна ынанабыз. Ошондуктан анын биринчи чейректеги $\frac{1}{4}$ бөлүгүн эсептеп алсак, аны 4 кө көбөйтүп, изделген аянтты таба алабыз. Штрихтелген бөлүгүндө φ бурчу 0 дөн $\frac{\pi}{4}$ кө чейин өзгөрүп, ρ нун чоңдугу a дан 0 гө чейин кемийт. Ошентип, биз

$$\frac{P}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi=\frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}\ \text{же}\quad P=a^2\ \text{кв. б.}$$

ээ болобуз.

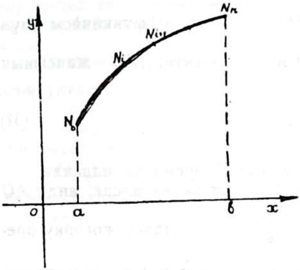
2. Уюлдук ок жана Архимеддин $\rho=a\varphi$ спиралынын биринчи орому менен чектелген жалпак фигуранын аянтын эсептегиле (96-чийме).

Архимеддин спиралынын биринчи орому, φ аргументи 0 дөн 2π ге чейин өзгөргөн кезде сызылат. Ошондуктан анын аянты:

$$P_{OMNL}=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2\, d\varphi=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3a^2\ \text{кв. б.}$$

болот.

3. Жаанын узундугун тик бурчтуу координаталарда эсептөө. Бизге $y=f(x)$ теңдемеси менен аныкталган кандайдыр бир ийри сызык берилсин. $[a, b]$ сегментине ал ийри сызыктын AB жаасы



97-чийме

туура келсин. Ушул AB жаасынын узундугун эсептөө керек болсун. Ушул максатта AB жаасын $N_0, N_1, \ldots, N_i, N_{i+1}, \ldots, N_n$ чекиттери аркылуу каалагандай узундуктагы бөлүктөргө бөлөбүз. Ал чекиттерди түз сызыктын кесиндилери менен туташтырып чыксак, AB жаасына ичтен сызылган $N_0N_1N_2 \ldots N_n$ сынык сызыгына ээ болобуз (97-чийме). Бөлүү чекиттерин канчалык арбын алсак, сынык сызык AB жаасына ошончолук жакындашат.

Аныктама. AB жаасынын узундугу деп, ага ичтен сызылган сынык сызыктын бөлүктөрү чексиз арбыган кездеги, ал эми эң чоң бөлүгүнүн узундугу нөлгө умтулган кездеги сынык сызыктын узундугунун пределин аташат.

Эгер ийри сызыктын ар бир чекитинде багыты тынымсыз өзгөрүп тура турган жанымасы бар болсо, анда ал *жылмакай* ийри сызык деп аталат. Эгер $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болуп жана үзгүлтүксүз $f'(x)$ туундусуна ээ болсо, анда $y=f(x)$ теңдемеси аныктаган ийри сызык жылмакай болот.

Теорема. *Ар кандай жылмакай ийри сызыктын жаасы белгилүү бир чектүү узундукка ээ болот жана ал $[a, b]$ сегментинде $y=f(x)$ функциясы менен аныкталса, анда анын узундугу*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{31}$$

формуласы боюнча эсептелет.

Д а л и л д ө ө. AB жаасына ичтен сызылган сынык сызыкты OX огуна проекциялайбыз. Анын N_iN_{i+1} бөлүгүнүн проекциясы Δx_i болуп, $y=f(x)$ функциясынын Δx_i сегментиндеги өсүндүсү Δy_i болсун. Пифагордун теоремасы боюнча $\overline{M_iN_{i+1}} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ болору белгилүү. Мында $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ болгондуктан, ага Лангранждын чектүү өсүндү жөнүндөгү теоремасын колдонуп, $\Delta y_i = f'(\overline{x}_i) \cdot \Delta x_i \, (x_i < \overline{x}_i < x_{i+1})$ барабардыгына ээ болобуз.

Δy_i нин бул маанисин радикалга коюп, Δx_i^2 ты кашаанын сыртына чыгарып, радикалдан чыгарсак: $\overline{N_iN_{i+1}} = \sqrt{1 + f'^2(\overline{x}_i)} \cdot \Delta x_i$ келип чыгат. Бул сынык сызыктын N_iN_{i+1} бөлүгүнүн узундугу. Демек, бүткүл сынык сызыктын узундугу $\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\overline{x}_i)} \cdot \Delta x_i$ суммасы менен туюнтулат.

AB жаасынын узундугун табуу үчүн, аныктама боюнча $n \to \infty$ жана $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \to 0$ кезде пределге өтүүгө тийишпиз. Мындагы

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(x_i)}\cdot\Delta x_i$ суммасы $F(x)=\sqrt{1+f'^2(x)}$ функциясы үчүн интегралдык сумма экендиги белгилүү. Ошентип, AB жаасынын L узундугу үчүн

$$L=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{31}$$

формулага ээ болобуз. Мында $y'=f'(x)$. Теорема далилденди.

Эгер AB жаасынан $Q(x, y)$ өзгөрмө чекитин алсак, анда AQ жаасынын узундугу $L(x)=\int\limits_a^x\sqrt{1+y'^2}\,dx$ түрүндөгү жогорку предели өзгөрмөлүү болгон аныкталган интеграл менен туюнтулат. Жогорку предели өзгөрмө болгон аныкталган интегралдын ошол предел боюнча туундусу, интеграл ичиндеги функциянын ошол пределдеги маанисине барабар экендиги белгилүү. Ошентип, алдынкы формуланы x боюнча диффренцирлесек:

$$L'(x)=\sqrt{1+y'^2}$$

келип чыгат. Ал эми $L'=\frac{dL}{dx}$ жана $y'=\frac{dy}{dx}$ экендигин эске алсак,

$$dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \tag{32}$$

формуласына ээ болобуз. Бул (32) формуланы *жаанын тик бурчтуу координаталардагы дифференциалы* дешет.

Мисал. $x^2+y^2=R^2$ айланасынын узундугун эсептегиле.

Мындан $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$ табылат. Биз бул айлананын $y=\sqrt{R^2-x^2}$ үстүнкү бөлүгүнүн узундугун эсептейлик, ал бүткүл айлананын узундугунун жарымы болору белгилүү. x өзгөрмөсү $-R$ ден $+R$ ге чейин өзгөрөрү белгилүү. Ал эми $y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$,

$\sqrt{1+y'^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$ болгондуктан,

$$\frac{L}{2}=\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{1+y'^2}\,dx=R\int\limits_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\cdot\arcsin\frac{x}{R}\Big|_{-R}^{R}=$$

$$=R\Big[\arcsin 1-\arcsin(-1)\Big]=R\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\pi R,$$

демек $L=2\pi R$ болуп, айлананын узундугунун бизге белгилүү болгон формуласынын өзүнө ээ болобуз.

4. Жаанын узундугун уюлдук координаталарда эсептөө. Эми ийри сызык уюлдук координаталардагы $\rho=f(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$ теңдемеси менен берилген учуруна токтолобуз. Эң мурда (32) боюнча жаанын дифференциалын эсептейбиз. Ал үчүн уюлдук коордииаталар менен тик бурчтук координаталар арасындагы $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ байланышынан пайдаланабыз.

Мында

$$dx=\cos\varphi\, d\rho-\rho\sin\varphi\, d\varphi,\quad dy=\sin\varphi\, d\rho+\rho\cos\varphi\, d\varphi$$

болгондуктан, алардын эки жагын тең квадратка көтөрсөк:

$$dx^2=\cos^2\varphi\, d\rho^2-2\rho\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi d\rho+\rho^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2,$$

$$dy^2=\sin^2\varphi\, d\rho^2+2\rho\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi d\rho+\rho^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2$$

келип чыгат. Аларды мүчөлөп кошсок: $dL^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2$ ка ээ болобуз. Мында $d\rho^2=(\rho' d\varphi)^2=\rho'^2\cdot d\varphi^2$ экендигин эске алсак, $dL=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\cdot d\varphi$ табылат. Эки жагын тең $\varphi=\alpha$ дан $\varphi=\beta$ га чейин интегралдап,

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\varphi \tag{33}$$

формуласына ээ болобуз, мында $\rho=f(\varphi)$ ийри сызыктын теңдемеси, ал эми $\rho'=f'(\varphi)$ анын туундусу.

М и с а л. Архимеддин $\rho=a\cdot\varphi$ спиралынын (93-чийме) биринчи оромунун узундугун эсептегиле.

Мында $\rho_\varphi=a$ болгондуктан, $\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=a\sqrt{1+\varphi^2}$ болот. φ аргументи 0 дөн 2π ге чейин өзгөрөрү белгилүү. Ошентип, $L=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi$ интегралын эсептөө керек.

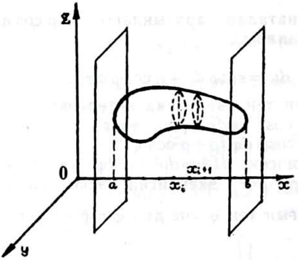
Эң мурда $\int\sqrt{1+x^2}\, dx$ аныкталбаган интегралды эсептеп алалык. Аны бөлүктөп интегралдайбыз. $u=\sqrt{1+x^2}$, $dv=dx$ десек $du=\frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $v=x$ болот. Демек, $\int\sqrt{1+x^2}\, dx=x\cdot\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Акыркы интегралдын ичиндеги бөлчөктүн алымына 1 ди кошуп, кайра 1 ди кемитип, бөлүмүнө мүчөлөп бөлөбүз, анда

$$\int\sqrt{1+x^2}\, dx=x\cdot\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}\, dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

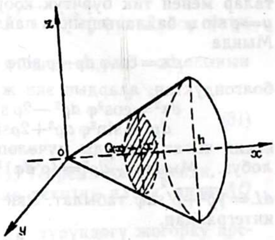
келип чыгат. Ортоңкусу биз эсептеп жаткан интегралдын өзү, аны барабардыктын сол жагына чыгарсак, $2\int\sqrt{1+x^2}\, dx=x\sqrt{1+x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ болот. Акыркысы таблицалык интеграл. Ал $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ экендиги белгилүү. Аны ордуна коюп, барабардыктын эки жагын тең 2 ге бөлсөк: $\int\sqrt{1+x^2}\, dx=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ болоруна ынанабыз. Демек изделген узундук:

$$L=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi=a\left[\frac{1}{2}\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\frac{1}{2}\ln(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2})\right]\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\text{ болот.}$$



98-чийме



99-чийме

5. Көлөмдү туурасынан кесилиши боюнча эсептөө. Кандайдыр бир мейкиндиктик нерсенин каалагандай чекитиндеги туурасынан кесилишинин аянты белгилүү болгон кезде, ал нерсенин көлөмүн эсептөө керек болсун. Ал нерсени Ox огун бойлото жайгаштырганда, ал окко $[a, b]$ сегментине проекциялансын, б. а. $x=a$ жана $x=b$ чекиттеринде Ox ке перпендикуляр жүргүзүлгөн, тегиздиктердин арасына камалган болсун. Нерсенин каалагандай $x \in [a, b]$ чекитиндеги Ox ке перпендикуляр тегиздик менен кесилгенде, түзүлгөн туурасынан кесилишинин аянты $Q=V(x)$ болсун. Эми $[a, b]$ сегментин $x_0<x_1<x_2<\ldots x_i<\ldots<x_n$ чекиттери аркылуу бөлүктөргө бөлүп, ар бир x_i чекити аркылуу Ox огуна перпендикуляр тегиздиктер жүргүзөбүз. Натыйжада геометриялык нерсе n катмарга бөлүнөт, алардын ар бирин цилиндр деп кароого болот (98-чийме). Ал эми i-катмардын көлөмү жакындаштырып, $Q(x_i)\cdot\Delta x_i$ болгондуктан, аларды суммалап, берилген нерсенин көлөмүнүн жакындатылган маанисине: $\sum\limits_{i=0}^{n-1} Q(x_i)\cdot\Delta x_i$ ээ болобуз.

Көлөмдүн так маанисин табуу үчүн $\lambda=\max\{\Delta x_i\}\to 0$ кезде пределге өтсөк:

$$V=\int_a^b Q(x)\,dx \tag{34}$$

формуласына ээ болобуз. Ошентип, туурасынан кесилиши боюнча көлөм ушул (34) формуладагы аныкталган интеграл боюнча эсептелет.

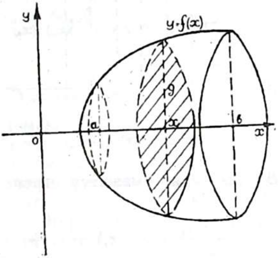
М и с а л. Негизи B, бийиктиги h болгон тик конустун көлөмүн эсептегиле.

Конустун чокусун O чекитине коюп, Ox огун анын бийиктиги боюнча багыттайбыз (99-чийме). Каалагандай x чекитинде Ox огуна перпендикуляр тегиздик конустан $Q(x)$ аянтты кесип өтсүн. Конустун параллель кесилиштеринин аянттары, чокусунан ошол кесилиштерге чейинки аралыктарынын квадраттары сыяктуу катышары белгилүү: $\frac{Q(x)}{B}=\frac{x^2}{h^2}$. Мындан $Q(x)=\frac{B}{h^2}x^2$ экендигин табабыз. Эми конустун көлөмү (34) боюнча оңой эле табылат:

$$V=\int\limits_0^h Q(x)\,dx=\frac{B}{h^2}\int\limits_0^h x^2\,dx=\frac{B}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}Bh.$$

Ошентип, бизге белгилүү болгон конустун көлөмүн туюнтуучу формуланын өзүнө ээ болдук.

6. Айлануудан пайда болгон нерсенин көлөмү. Бизге $y=f(x)$ ийри сызыгынын $[a, b]$ сегментиндеги бөлүгү менен чектелген ийри сызыктуу трапеция берилсин. Ошол трапеция Ox огуңун айланасында айланган кезде пайда болуучу геометриялык нерсенин көлөмүн эсептөө керек болсун. Анын көлөмү (34) формула боюнча эң оңой эсептелет. Чынында эле $[a, b]$ сегментинин каалагандай x чекитинде Ox ке перпендикуляр жүргүзүлгөн тегиздик, нерсени тегерек боюнча кесип өтөт. Ал тегеректин радиусу y болору белгилүү, демек анын аянты $Q(x)=\pi y^2$ болот (100-чийме). Ошентип, айланаудан пайда болгон нерсенин көлөмү



100-чийме

$$V=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx \tag{35}$$

формула боюнча эсептелет.

Мисал. Радиусу R болгон шардын көлөмүн эсептегиле.

Шарды $x^2+y^2\leqslant R^2$ тегереги Ox огунун айланасында айланууудан пайда болгон геометриялык нерсе деп кароого болот. Мында x өзгөрмөсү $-R$ ден R·ге чейин өзгөрөрү белгилүү. Каалагандай x чекитинде Ox ке перпендикуляр жүргүзүлгөн тегиздик шардан, радиусу $y=\sqrt{R^2-x^2}$ болгон тегеректи кесип өтөт. Демек шардын көлөмү:

$$V_ш=\pi\int\limits_{-R}^{R} y^2\,dx=\pi\int\limits_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=$$

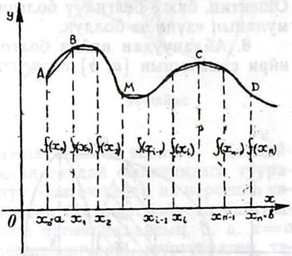
$$=\pi\left[R^3-\frac{R^3}{3}+R^3-\frac{R^3}{3}\right]=\pi\left[2R^3-\frac{2R^3}{3}\right]=\frac{4}{3}\pi R^3$$

болот. Биз өзүбүзгө тааныш формуланын өзүнө ээ болдук.

§ 9. Аныкталган интегралдарды жакындаштырып эсептөө

Бардык эле тунгуч функцияны элементардык функция аркылуу туюнтууга болбойт. Мындай учурда аныкталган интегралды Ньютон-Лейбництин формуласы менен эсептеп чыгаруу кыйынчылыктуу болот. Ошондуктан аларды ар түрдүү ыкмалардын негизинде жакындаштырып эсептөөгө туура келет. Биз андай ыкмалардын практикада көп кездеше турган эң жөнөкөйлөрүн гана карайбыз.

Бизге $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралын эсептеп чыгаруу берилсин дейли, мында $f(x)$— үзгүлтүксүз функция жана $f(x) \geqslant 0$, $[a, b]$ интегралдоо сегментин $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b$ чекиттери менен барабар n бөлүккө бөлөбүз. Бөлүү чекиттери аркылуу OY огуна параллель түз сызыктарды жүргүзүп, n түз сызыктуу трапецияларды түзөбүз (100, a-сүрөт). Алардын аянттарынын суммасы болжол менен берилген $ABMCD$ ийри сызыктуу трапециянын аянтына барабар деп эсептейбиз. б. а.



100a-сүрөт

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{f(x_{n-1} + f(x_n)}{2}(x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]. \quad (1)$$

Мында $f(x_{i-1})$ жана $f(x_i)$ — тийиштүү трапециялардын негиздери, ал эми $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, алардын бийиктиктери,

$$f(x_0) = f(a),\ f(x_n) = f(b).$$

Бул формула трапециялардын формуласы деп аталат. Ал n канчалык чоң болгон сайын, ошончолук так маанини берет.

М и с а л ы: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ интегралын трапециялардын формуласы боюнча, $n = 10$ деп жакындаштырып эсептейли. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+1}$ интегралдоо сегментин $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2, \ldots$, $x_9 = 0{,}9$, $x_{10} = 1$ чекиттери менен барабар 10 бөлүккө бөлөбүз. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ функциясынын ушул чекиттердеги маанилерин жакындаштырып эсептеп чыгарабыз:

$$f(0)=1,0000 \qquad f(0,6)=0,6250$$
$$f(0,1)=0,9091 \qquad f(0,7)=0,5882$$
$$f(0,2)=0,8333 \qquad f(0,8)=0,5556$$
$$f(0,3)=0,7692 \qquad f(0,9)=0,5263$$
$$f(0,4)=0,7143 \qquad f(1)=0,5000$$
$$f(0,5)=0,6667$$

Трапециялардын формуласы боюнча төмөнкүнү алабыз:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1,0000+0,5000}{2}+0,9091+0,8333+0,7692+0,7143+\right.$$
$$\left.+0,6667+0,6250+0,5882+0,5556+0,5263\right)=0,69377\approx 0,6938.$$

Берилген интегралдын так маанисин Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча эсептесек, төмөнкүнү алабыз:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0,69315.$$

Демек, трапециялардын формуласы боюнча алынган катанын жыйынтыгы 0,0007 ден кичине экендигин көрдүк. Көпчүлүк техникалык маселелерди чыгарууда мындай тактык жетиштүү болот. Эгерде n санын чоңойтсок, анда эсептөөнүн тактыгы да жогорулайт.

Эгерде $y=f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинин ар бир ички чекиттеринде экинчи тартиптеги $f''(x)$ туундуга ээ болсо, анда трапециянын формуласынын абсолюттук катасы

$$\Delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(x)| \tag{2}$$

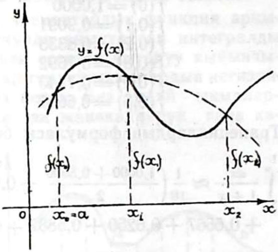
боло тургандыгы далилденген. Ушул формула боюнча трапециялардын формуласынын негизинде жогорку мисалдан алынган жыйынтыктын катасын табалы.

$f(x)=\frac{1}{1+x}$ болгондуктан, $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ болот.

Анда $[0, 1]$ кесиндисинде $|f''(x)|\leqslant 2$. Демек, $\Delta(10)\leqslant \frac{2}{12\cdot 10^2}=$ $=\frac{1}{600}<0,0017$. Бул болсо, трапециялардын формуласынын катасынын чоңдугун туюндура турган формула (2), катаны өтө эле жетишсиз тактыкта көрсөтө тургандыгын жана практикадагыга караганда теориялык мааниси көбүрөөк экендигин билдирет.

Трапециялардын формуласын түзүүдө колдонулган идеяны андан ары дагы өнүктүрүп, аныкталган интегралды эсептөө үчүн дагы тагыраак жакындатылган формуланы алуу үчүн колдонууга болот. Мисалы, эгерде интегралдын алдындагы функциянын айрым $[x_{i-1}, x_i]$ кесиндилердеги графигин трапециялардын формуласын чыгаруудагыдай хорда эмес, OY огуна параллель болгон октор менен чектелген параболалардын жаалары менен алмаштырсак (100, б-сүрөт), анда төмөнкү формулага келебиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big\{ f(x_0) + f(x_{2n}) + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})\right] + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})\right]\Big\}.$$



100б-сүрөт

Бул формула параболалардын формуласы же Симпсондун формуласы деп аталат. Бул формулада деле, трапециялардын формуласындагыдай $[a, b]$ кесиндиси $x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_{2n}=b$ чекиттери менен барабар $2n$ бөлүккө бөлүнөт. Симпсондун формуласын чыгарууда трапециялардын формуласын чыгаруудагыдан ашыкча жаңы идеялар пайдаланбайт, бирок ал татаалыраак болуп эсептелет. Биз ага токтолбойбуз.

Симпсондун формуласынын геометриялык мааниси да анык: $[a, b]$ кесиндисинде $f(x)$ ийри сызыгы менен чектелген трапециянын аянты болжол менен параболалар менен чектелген фигуралардын аянттарынын суммасы аркылуу туюнтулат.

Жакындаштырылган формулалардын тактыгын салыштырыш үчүн

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

интегралын Симпсондун формуласы боюнча $n=4$ деп алып, кайрадан эсептеп чыгабыз. $[0, 1]$ кесиндисин $x_0=0,\quad x_1=\frac{1}{4}, x_2=\frac{1}{2},$ $x_3=\frac{3}{4},\ x_4=1$ чекиттери менен барабар төрт бөлүккө бөлүп, $f(x)=\frac{1}{1+x}$ функциясынын маанисин эсептеп чыгабыз: $f(x_0)=1{,}0000$; $f(x_1)=0{,}8000$; $f(x_2)=0{,}6667$; $f(x_3)=0{,}5714$; $f(x_4)=0{,}5000$.

Симпсондун формуласынан төмөнкүнү алабыз:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{b-a}{6n}\Big\{ f(x_0) + f(x_4) + 2f(x_2) + 4\left[f(x_1) + f(x_3)\right] =$$

$$= \frac{1-0}{12}\cdot\left[1{,}0000 + 0{,}5000 + 2\cdot 0{,}6667 + 4(0{,}8000 + 0{,}5314)\right] \approx 0{,}69325.$$

Бул жыйынтык так мааниден 0,0001 ге кичине. Демек бул, Симпсондун формуласы трапециялардын формуласынан, бөлүү чекиттери аз санда болгондугуна карабастан, абдан так экендигин билдирет. Ошондуктан бул формула аныкталган интегралдарды жакындаштырып эсептөө үчүн, трапециялардын формуласына караганда көбүрөөк колдонулат.

§ 10. Өздүк эмес интегралдар жөнүндө түшүнүк. Пуассондун интегралы

1. Пределдери чексиз өздүк эмес интегралдар. Биз ушул убакытка чейин үйрөнүп келген аныкталган интеграл чектүү $[a, b]$ сегментинде аныкталган $y=f(x)$ үзгүлтүксүз фукциясынан алынган интеграл болуп саналат. Мындай үзгүлтүксүз функциянын чектүү пределдүү $\int_a^b f(x)dx$ интегралын, **ө з д ү к** интеграл деп коюшат.

Эми аныкталган өздүк интегралдын түшүнүгүн кеңитүүгө токтолобуз. Өздүк интегралдын пределдеринин бири же экөө тең чексиз болсо, ал *предели чексиз өздүк эмес интеграл* деп аталат. Ал эми пределдери чектүү болсо да, интеграл ичиндеги $f(x)$ функциясы, ошол аралыктын кандайдыр бир чекиттеринде $\pm\infty$ ге умтулса, ал интегралды *чектелбеген функциянын өздүк эмес интегралы* деп аташат.

Аныктама. *Эгер* $\int_a^b f(x)\,dx$ *интегралы* $b\to+\infty$ *да белгилүү бир пределге (чектүү же чексиз) ээ болсо, анда аны функциянын жогорку предели чексиз өздүк эмес интегралы деп аташат да*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{36}$$

аркылуу белгилешет.

Эгерде бул предел чектүү болсо, анда (36) өздүк эмес интегралды *жыйналуучу* деп, ал эми ал предел чексиз болсо же табылбаса, анда (36) интегралды *жыйналбоочу* деп атайбыз. Интеграл жыйналуучу болгон кезде $f(x)$ функциясы $[a, +\infty]$ чексиз жарым сегментте *интегралдануучу функция* деп аталат.

Төмөнкү предели чексиз жана эки предели тең чексиз интегралдар ирети менен:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (a<b), \tag{37}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)\,dx \quad (a<b) \tag{38}$$

барабардыктары аркылуу аныкталышат.

Өздүк интегралдагы сыяктуу эле өздүк эмес интегралды дагы $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{-c}^{+\infty} f(x)dx$ суммасы түрүндө туюнтууга болот.

М и с а л д а р. 1. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интегралын эсептегиле.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \Big[\operatorname{arctg} x \Big]_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \pm \frac{\pi}{2}.$$

$$2. \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} (-\operatorname{arctg} a) = +\frac{\pi}{2}.$$

$$3. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Демек, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ функциясы бүткүл $(-\infty, +\infty)$ чексиз интервалда интегралдануучу функция болот, анын чексиз аралыктагы интегралы жыйналуучу болот.

4. $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралы $[a, +\infty)$ чексиз жарым сегментинде α нын кандай маанилеринде жыйналуучу, кандай маанилеринде жыйналбоочу болот?

Эң мурда $\alpha \neq 1$ учурун карайлык. Мында

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} x^{-\alpha}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Bigg|_{a}^{b} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} (b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}).$$

болгондуктан, $\alpha < 1$ болсо $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-\alpha}$ туюнтмасы чексизге умтулат, демек интеграл дагы чексизге умтулуп жыйналбайт.

Эгер $\alpha > 1$ болсо, $\lim\limits_{b\to+\infty} b$ туюнтмасы нөлгө умтулуп, $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ болуп, чектүү мааниге ээ болобуз, Ошентип, $\alpha > 1$ учурунда интеграл жыйналат.

$\alpha = 1$ болгон учурда берилген интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln b - \ln a \Big] = +\infty$$ болуп жыйналбайт.

Жыйынтыктап айтканда, $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ өздүк эмес интегралы $[a, +\infty)$ чексиз интервалында $\alpha > 1$ болсо жыйналат, ал эми $\alpha \leqslant 1$ болгондо жыйналбайт.

Өздүк интегралдын көпчүлүк касиеттери өздүк эмес интегралга дагы жайылтыларын көрсөтүүгө болот. Алсак, интегралдануучу функциялардын алгебралык суммасынын өздүк эмес интегралы ал функциялардын өздүк эмес интегралдарынын алгебралык суммасына барабар, туррактуу чоңдукту өздүк эмес интегралдын сыртына чыгарууга болот деген сыяктуу касиеттери орундалат.

Өздүк эмес интегралды да Ньютон—Лейбництин формуласы боюнча эсептөөгө болорун көрсөтүүгө болот, атап айтканда эгер $F(x)$ функциясы $f(x)$ үчүн тунгуч функция болсо, анда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \qquad (39)$$

формулалары аткарылат.

Мисалдар. 1. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx$ өздүк эмес интегралын эсептегиле. Аны (4) боюнча эсептейлик: $x^3 = z$ десек, $3x^2dx = dz$, $x^2\,dx = \frac{dz}{3}$, $x=0$ дө $z=0$, $x=\infty$ де $z=\infty$ болуп,

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} e^{-z}\,dz = -\frac{1}{3}e^{-z}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3}$$

келип чыгат.

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2}$ интегралын эсептегиле.

Муну бөлүктөп интегралдайбыз. $U = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$ десек, $du = \frac{dx}{x}$, $v = -\frac{1}{x}$ болот, демек,

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{\infty}.$$

Жогорку $+\infty$ пределди биринчи кошулуучуга койгондо, $\frac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздык келип чыгат. Ошондуктан ага Лопиталдын эрежесин колдонобуз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Демек, берилген интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\left[\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1$$

маанисине ээ болуп, жыйналуучу интеграл болот.

2. Чектелбеген функциялардын өздүк эмес интегралдары. $f(x)$ функциясы $[a, b]$ чектүү сегменттин кээ бир чекиттеринде чектелбеген функция болсун. Алсак, ал сегменттин сол жаккы a учунда $+\infty$ ге умтулса, өздүк интегралды аныктоочу $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ интегралдык суммадагы ξ чекиттерин a га жакындатып алуунун эсебинен, ал сумманы чексиз чоң мааниге умтултууга болот. $f(x)$ тин өзгөрүүсүнө жараша ξ_i чекиттери a га канчалык жакындаса да, мындай сумма кээде чектүү пределге, кээде чексиз пределге умтулушу ыктымал.

Аныктама *Эгер* $\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$ *интегралы* $\delta\to 0$ *кезде белгилүү бир пределге умтулса (чектүү же чексиз), анда ал пределди* $f(x)$ *чектелбеген функциянын өздүк эмес интегралы деп аташат да, аны*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx \tag{40}$$

аркылуу белгилешет.

Эгер бул предел чектүү болсо, анда (40) интегралды *жыйналуучу* деп, чексизге умтулса, аны *жыйналбоочу* деп атайбыз.

Ал предел жыйналуучу болгондо, $f(x)$ чектелбеген функция $[a, b]$ сегментинде *интегралдануучу* деп аталат.

Эгер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегменттин оң жаккы b учунда же ал сегменттин ички c чекитинде чексизге умтулса, анда алардын өздүк эмес интегралдары ирети менен:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta_1\to 0}\int\limits_{a}^{b-\delta_1} f(x)\,dx,\quad \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta_1\to 0}}\int\limits_{a+\delta}^{b-\delta_1} f(x)\,dx \tag{41}$$

интегралдары менен аныкталышат.

Мисалдар. 1. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегралын эсептегиле.

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{-1+\delta}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to 0}\left[-\arcsin(-1+\delta)\right] = \frac{\pi}{2}.$$

2. $$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta_1\to 0}\int\limits_{0}^{1-\delta_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta_1\to 0}\left[\arcsin(1-\delta_1)\right] = \frac{\pi}{2}.$$

3. $$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Демек, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ чектелбеген функция $[-1, 1]$ сегментинде интегралдануучу функция болуп, анын интегралы жыйналат.

3. Пуассондун интегралы. $f(x) = e^{-x^2}$ функциясынын $[0, +\infty]$ чексиз жарым сегментинде алынган $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ өздүк эмес интегралы *Пуассондун интегралы* деп аталат. Пуассондун интегралынын ичиндеги $f(x)=e^{-x^2}$ функциясы үчүн тунгуч функция жок, б. а. туундусу e^{-x^2} ка барабар боло турган элементардык функция жок. Ошондуктан Пуассондун интегралын түздөн-түз Ньютон—Лейбництин формуласы боюнча дароо эсептей албайбыз.

Бирок дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдүн биздин бул кыскача курста айтылбаган бир кыйла татаалыраак методдорунун жана белгилүү бир башка формулалардын жардамы менен Пуассондун интегралы $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ге барабар экендигин далилдөөгө болот. Ошентип, мындан ары:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{42}$$

деп кабыл алабыз.

Пуассондун интегралы жогорку математиканын «ы к т ы м а л д ы к т а р т е о р и я с ы» деп аталган, кийинчерээк өтүлө турган бөлүмүндө өтө кеңири колдонулат.

Мында π саны иррационалдык сан болгондуктан, анын мааниси, демек, Пуассондун интегралы да каалагандай тактыкка чейин жакындатылып эсептелет. Кийинчерээк катарлар теориясы өтүлгөн соң Пуассондун интегралын, анын ичиндеги $f(x)=e^{-x^2}$ функциясын катарга ажыратып туруп, интегралдоо аркылуу дагы каалагандай тактыкта эсептөөгө болот.

IV БӨЛҮМ

XIII глава. КАТАРЛАР

§ 1. Сандык катарлар жана алардын жыйналуучулугу

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \dots,\ a_n,\ \dots \tag{1}$$

чексиз сандык удаалаштыктан түзүлгөн

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots \tag{3}$$

туюнтма *сандык катар деп аталат.* Мында a_1 катардын биринчи мүчөсү, a_2 экинчи, ал эми a_n болсо *n-жалпы мүчөсү* деп аталат. Катарды түзүү үчүн анын жалпы мүчөсүнүн берилиши жетиштүү.

Алсак, эгер $a_n=\frac{1}{n(n+3)}$ болсо, анда катар

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\dots+\frac{1}{n(n+3)}+\dots \tag{2'}$$

түрүндө жазылат. Ал эми $a_n=\frac{1}{n^2}$ болсо, анда биз

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots \tag{2''}$$

катарына ээ болобуз.

(2) катардагы биринчи n мүчөсүнүн суммасы катардын n-*толук эмес суммасы* деп аталат да,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \tag{3}$$

аркылуу белгиленет.

Кыскача (1) катар менен (3) катардын толук эмес суммасы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ жана } S_n = \sum^{n} a_k \tag{4}$$

түрүндө да жазылат.

Аныктама. *Эгерде катардын биринчи n мүчөлөрүнүн S_n айрым суммасы $n \to \infty$ да кандайдыр бир S чектүү пределине умтулса, б. а. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ чектүү сан болсо, анда (2) катар жыйналуучу катар деп, ал эми S саны катардын суммасы деп аталат.*

Катар жыйналуучу болгондо,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{5}$$

деп жазылат.

Эгер $n \to \infty$ да S_n дин предели болбосо же $\pm\infty$ ге умтулса, анда (2) катар *жыйналбоочу* катар деп аталат.

Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиядан түзүлгөн:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \tag{6}$$

катар жыйналуучу катар болот. Чындыгында эле (6) катардын n-толук эмес суммасы:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

болуп, $n \to \infty$ да $|q| < 1$ болгондуктан,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

чектүү пределге ээ болот.

Эгер $q = 1$ болсо, (6) катар:

$$a + a + a + \dots + a + \dots \tag{6'}$$

түрүндө болуп, $S_n = n \cdot a$ болгондуктан, $n \to \infty$ дан a нын белгисине жараша анын предели $+\infty$ же $-\infty$ ге умтулуп, (6′) жыйналбоочу катар болот.

Эгер $q = -1$ болсо,

$$a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1} a + \dots \tag{6''}$$

катарына ээ болобуз. Мында $S_{2k} = 0$, $S_{2k-1} = a$ болгондуктан, S_n толук эмес суммасы чектүү пределге ээ болбойт, анткени n жуп болсо $S_n = 0$, ал эми n так болсо, $S_n = a$ болот. Ошентип бул учурда (6″) катары жыйналбайт.

$|q| > 1$ кезинде да (6) катар жыйналбоочу катар болот, анткени бул учурда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-aq^n}{1-q}$ предели чексизге умтулат.

Жыйынтыктап айтканда, (6) катар $|q|<1$ болгон кезде гана жыйналуучу катар болуп, $|q|\geqslant 1$ кезинде жыйналбоочу болот.

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}+\ldots \tag{7}$$

катарын карайлы. Бул катар *Стрилингдин катары* деп аталат. Ал каалагандай оң a үчүн жыйналуучу катар болот. Чынында эле аны

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+2}\right)+\left(\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a+n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a+n}\right)+\ldots \tag{7'}$$

түрүндө жазууга болот. Демек, анын S_n толук эмес суммасы

$S_n=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n}$ болуп, дайыма

$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a}$ болот.

$a=1$ кезинде суммасы 1 болгон:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \ldots\ +\frac{1}{n(n+1)}+\ldots \tag{8}$$

катарына ээ болобуз.

***Теорема.* Эгерде (2) катардын биринчи k мүчөсүн алып салгандан кийинки калган**

$$a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n+\ldots \tag{9}$$

катары жыйналса (жыйналбаса), анда (2) катар дагы жыйналат (жыйналбайт).

Д а л и л д ө ө. Шарт боюнча (9) жыйналуучу болгондуктан

$$\lim_{n\to\infty}(u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+(n-k)}+\ldots)=S_1$$

чектүү сан болот. Анда (2) катар үчүн

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\Big[(u_1+u_2+\ldots+u_k)+(u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+(n-k)})\Big]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\ldots+u_k)+\lim_{n\to\infty}(u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_{k+(n-k)})=u_1+u_2+$$

$$+\ldots+u_n+S_1$$

чектүү пределге ээ болобуз. Демек, (2) катар да жыйналат. Ал эми (9) катар жыйналбаса, (2) катардын да жыйналбастыгы далилденет. Ошентип, жыйналуучу катардын биринчи k мүчөсүн алып салуудан, же k мүчөнү кошуп коюудан катардын жыйналуучулугу бузулбайт.

Гармоникалык катар.

Натуралдык сандардын тескери чондуктарынан түзүлгөн

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (1)$$

катар *гармоникалык катар* деп аталат. Бул катардын мүчөлөрү улам кичирейип олтургандыгына карабастан, катар өзү жыйналбоочу катар болот. Аны далилдөө үчүн $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ удаалаштыгы Непердин e санына умтуларын жана $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ экендигин эске алабыз. Мындан

$$\ln e>n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \text{ же } \frac{1}{n}>\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

барабарсыздыгына ээ болобуз. Мындагы n ге ирети менен 1, 2, 3, 4... маанилерин берсек,

$$1>\ln 2-\ln 1,$$

$$\frac{1}{2}>\ln 3-\ln 2,$$

$$\frac{1}{3}>\ln 4-\ln 3,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n$$

барабарсыздыктары келип чыгат.

Буларды мүчөлөп кошсок:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$$

пайда болот. Мында $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ болору ачык. Демек, анда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S=\infty$ болуп, (1) гармоникалык катар жыйналбоочу болот.

§ 2. Сандык катардын жыйналуучулугунун зарыл шарты

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (2)$$

сандык катар жыйналуучу болуп, суммасы S болсун. Анда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ жана $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S$ болору ачык. Ал эми $a_n=S_n-S_{n-1}$ болгондуктан:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

Мына ошентип, төмөнкүдөй теорема орун алат.

Теорема. *Эгер (2) катар жыйналса, анда n номери чексиз чоңойгондо, ал катардын a_n жалпы мүчөсү нөлгө умтулат.*

Бирок бул белги зарыл гана шарт болуп саналат, ал жетиштүү шарт боло албайт, б. а. $n\to\infty$ де жалпы мүчөсү нөлгө умтулган катардын бардыгы эле жыйнала бербейт. Алсак, гармоникалык катардын жалпы мүчөсү $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ нөлгө умтулганы менен анын жыйналбай тургандыгын көрдүк.

Ал эми эгер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ болсо, анда (2) катар жыйналбайт, анткени катар жыйналуучу болсо, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болот эле.

Мисал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}$ катары жыйналбайт, анткени

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

§ 3. Жыйналуучулуктун жетиштүү шарты. Катарларды салыштыруу

Теорема. *Эгерде он мүчөлүү*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \quad (2)$$

жана

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots \quad (3)$$

эки катардын мүчөлөрү үчүн кандайдыр бир N номерден баштап $a_n\leqslant b_n$ барабарсыздыгы орундалса, анда (3) катар жыйналуучу болсо, (2) дагы жыйналат, ал эми (2) катар жыйналбоочу болсо, (3) дагы жыйналбайт.

Далилдөө. Катардын чектүү сандагы мүчөсүн алып коюштан катардын жыйналуучулугу бузулбагандыктан, $a_n\leqslant b_n$ барабарсыздыгы биринчи мүчөдөн баштап эле орундалат деп эсептөөгө болот. (2) жана (3) катардын n-толук эмес суммаларын ирети менен S_n жана S_n' аркылуу белгилесек, $a_n\leqslant b_n$ биринчи эле мүчөдөн баштап орундалгандыктан $S_n\leqslant S_n'$ болору шексиз... Теоремада айтылгандай (3) катар жыйналуучу болсун, анда S_n' толук эмес сумма чектүү пределге ээ болот. Демек, $S_n\leqslant S_n'$ болгондуктан, S_n толук эмес сумма дагы чектүү пределге ээ болот да (2) катар жыйналуучу болот.

Ал эми (2) катар жыйналбоочу болсо, анда S_n толук эмес сумманын предели чексизге умтулат. Демек, $S_n\leqslant S_n'$ болгондуктан, S_n' тин предели да чексизге умтулуп, (3) катар жыйналбоочу болот. Теорема толук далилденди.

Мисалдар.

1. $$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots \quad (3')$$

катарынын жыйналарын же жыйналбасын көрсөткүлө. Муну $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ (2″) гармоникалык катар менен салыштырабыз. Мында $a_n=\frac{1}{n+1}$, $b_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$ болсун десек, ар кандай сан өзүнүн логарифминен чоң болгондуктан, $a_n=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\ln(n+1)}=b_n$ болот. Ал эми (2′) гармоникалык катар жыйналбоочу болгондуктан, (3′) катар дагы жыйналбайт.

2. Эми $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$ (2″)

катары берилсин. Бул катарды бөлүмү $q=\frac{1}{2}$ болгон $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+$ $+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ (3″) катары менен салыштырабыз. Мында $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$, ал эми $b_n=\frac{1}{2^n}$ десек, $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n}=b_n$ экендиги ачык. Мындагы (3″) катары жыйналуучу болгондуктан, (2″) дагы жыйналуучу катар болот.

§ 4. Даламбердин белгиси

Бардык мүчөлөрү оң болгон

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \tag{2}$$

сандык катар берилсин.

Теорема. *Эгерде оң мүчөлүү (2) катары үчүн* $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *предели бар болсо, анда:*

1) $l<1$ болсо, катар жыйналуучу болот;

2) $l>1$ болсо, катар жыйналбоочу болот

Эгерде $l=1$ болсо, анда катардын жыйналарын же жыйналбасын ачык айтууга болбойт.

Бул белгини Даламбердин белгиси дешет.

Д а л и л д ө ө. 1) $l<1$ учурун карайлык. Шарт боюнча $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ болгондуктан, мурунтадан берилген $\varepsilon>0$ саны канчалык кичине болсо да, кандайдыр бир N номерден баштап бардык $n>N$ үчүн

$$l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарылат. $l<1$ болгондуктан, $\varepsilon>0$ санын $l+$ $+\varepsilon<1$ барабарсыздыгы орундала тургандай кылып тандоого болот. Эгер $q=l+\varepsilon<1$ деп белгилесек, ошол $n>N$ ден баштап, $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$ $(q<1)$ барабарсыздыгы аткарылат. Демек, ошол N номерден баштап

$$\left.\begin{array}{l} a_{N+1}<q\cdot a_N, \\ a_{N+2}<q\cdot a_{N+1}<q^2\cdot a_N, \\ a_{N+3}<q\cdot a_{N+2}<q^3\cdot a_N, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (*)$$

барабарсыздыктары орундалат.

Эми (2) катар менен

$$a_N+q\cdot a_N+q^2\cdot a_N+\ldots+q^n\cdot a_N+\ldots \qquad (3)$$

катарды салыштырабыз. Мындагы (3) катар бөлүмү $q<1$ болгон чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия болгондуктан, жыйналуучу катар болот. Ал эми $N+1$ ден баштап (2) катардын мүчөлөрү (*) нын негизинде (3) жыйналуучу катардын тиешелүү мүчөлөрүнөн кичине болгондуктан, (2) дагы жыйналуучу катар болот. Теореманын 1) бөлүгү далилденди.

2) Эми $l>1$ болсун. Анда $\varepsilon=l-1>0$ болгудай кылып алсак, $l-\varepsilon=1$ болуп, $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ болору ачык. Мындан $a_{n+1}>a_n$ болгондуктан (2) катардын улам кийинки мүчөсү чоңоюп, $n\to\infty$ да анын жалпы мүчөсү нөлгө умтулбайт. Демек, жыйналуучулуктун зарыл шарты аткарылбайт да, (2) катар жыйналбоочу болот.

3) $l=1$ болгон кезде катар жыйналуучу болушу да ыктымал, жыйналбоочу болушу да ыктымал. Алсак, гармоникалык катар үчүн

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1,$$

бирок анын жыйналбоочу экендигин билебиз. Ал эми $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ катары үчүн дагы

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

бирок анын жыйналуучу экендигин билебиз.

Ушуну менен теорема толук далилденди.

Мисалдар.

1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 3^n}+\ldots$

катарынын жыйналуучулугун изилдегиле.

Мында $a_n=\frac{1}{n\cdot 3^n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$ болгондуктан,

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}:\frac{1}{n\cdot 3^n}\right]=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}<1$$

Демек, бул жыйналуучу катар.

2) $1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n+\ldots$

катарынын жыйналарын же жыйналбасын көрсөткүлө. Мында $a_n=n\cdot 2^n$, $a_{n+1}=(n+1)\cdot 2^{n+1}$ болгондуктан:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1}=2>1$$

Демек, бул катар жыйналбайт.

§ 5. Кошинин интегралдык белгиси

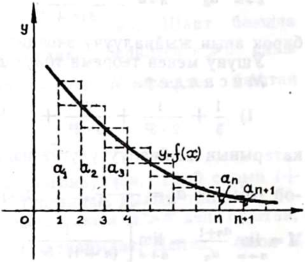
$l=1$ учурунда Даламбердин белгиси катардын жыйналуучулугу жөнүндө ачык жооп бере албагандыктан, андан күчтүүрөөк белгини айта кетебиз. Бул белги *Кошинин интегралдык белгиси* деп *аталат.*

Теорема. *Оң мүчөлүү (2) катардын мүчөлөрү өспөөчү удаалаштыкты түзүшсүн б. а. $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant\ldots$ болсун. Ал эми бүтүн аргументтүү $f(n)$ функциясы үзгүлтүксүз жана өспөөчү болуп (2) катардын мүчөлөрү менен $f(n)=a_n$ аркылуу байланышсын. Мында:*

1) Эгер $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ өздүк эмес интегралы чектүү мааниге ээ болсо, анда (2) катар жыйналат.

2) Эгер $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ өздүк эмес интегралы чектүү мааниге ээ болбосо, анда (2) катар жыйналбайт. Мындагы a каалагандай чектүү сан.

Далилдөө. $y=f(x)$ функциясынын графигин сызып, OX огунун 1, 2, 3 ... чекиттеринен ал график менен кесилишкенче OX ке перпендикуляр сызыктар жүргүзөбүз. Анда ал чекиттердеги ординаталар (2) катардын тиешелүү мүчөлөрүн туюнтушат, анткени $f(n)=a_n$ болгондуктан, $a_1=f(1), a_2=f(2), \ldots, a_n=f(n),\ldots$ болот. Эми негиздери бир болуп, бийиктиктери $a_1, a_2, \ldots, a_n$ болушкан тик бурчтуктарды түзөбүз (101-чийме).



101-чийме

Алардын ар биринин аянттары $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ге барабар экендиги ачык көрүнүп турат. Ийри сызыктуу трапецияны ичине камтып турган биринчи n тик бурчтуктун аянттарынын суммасы (2) катардын n- толук эмес суммасына $S_n=a_1+a_2+\ldots$

$\ldots+a_n$ барабар экендиги чиймеден ачык көрүнүп турат. Экинчи жактан үстү жагынан $y=f(x)$ ийри сызыгы, эки капталынан $x=1$ жана $x=n+1$ түз сызыктары, төмөн жагынан OX огу менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянты өзүн камтып турган баскычтуу фигуранын аянтынан кичине экендиги дагы ачык көрүнүп турат.

Бул аталган ийри сызыктуу трапециянын аянты $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ аркылуу эсептелерин билебиз, ошентип,

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n \tag{3}$$

барабарсыздыгына ээ болобуз. Мындан пайдаланып, теореманын экинчи бөлүгүн далилдейбиз. Чындыгында эле $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx=\infty$ болсун десек, $n\to\infty$ да $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ интегралы дагы чексиз өсөт дегендик болот, анда (3) боюнча S_n толук эмес сумма да чексиз өсөт. Демек, (2) катар жыйналбайт.

Эми ошол эле чиймедеги ийри сызыктын төмөн жагында жатып ага толугу менен камтылган тик бурчтуктардын аянттарынын суммасын карайбыз. Ал тик бурчтуктардын биринчисинин аянты a_2, экинчисиники a_3 кө ал эми n-тик бурчтуктуку a_{n+1} ге барабар. Бул ички тик бурчтуктардан түзүлгөн баскычтуу фигуранын аянты $S_{n+1}-a_1$ болуп, жогоруда аталган ийри сызыктуу трапециянын аянтынан кичине болот:

$$S_{n+1}-a_1<\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \text{ же } S_{n+1}<a_1+\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Акыркы барабарсыздык аркылуу теореманын биринчи бөлүгү оңой эле далилденет. Чынында эле теореманын шарты боюнча $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ өздүк эмес интеграл чектүү мааниге ээ болгондуктан, $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx$ интегралы дагы чектүү болот. Ал эми $S_n<S_{n+1}$ болгондуктан, S_n толук эмес суммасы (4) боюнча жогору жагынан чектелген болот. Бул болсо (2) катардын жыйналуучулугун көрсөтөт. Теорема толук далилденди.

Мисал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ катарынын жыйналуучулугун изилдегиле.

$\alpha=1$ кезинде ал гармоникалык катарга айланат, ушуга байланыштуу бул катарды жалпыланган гармоникалык катар деп аташат. $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ десек, бул функция алдыңкы теореманын шарттарын толук канааттандырат.

Эми төмөнкү интегралды карап көрөлү:

$$\int_1^M \frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha}\Big|_1^M=\frac{1}{1-\alpha}(M^{1-\alpha}-1), \text{ эгер } \alpha\neq 1,\\ \ln x\Big|_1^M=\ln M, \text{ эгер } \alpha=1 \text{ болсо.}\end{cases}$$

$M\to\infty$ де төмөндөгүлөргө ээ болобуз:

а) Эгер $\alpha>1$ болсо, анда $M^{1-\alpha}\to 0$ да $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$ чектүү маани табылат. Демек интегралдык белги боюнча бул учурда катар жыйналат.

б) Эгер $\alpha<1$ болсо, анда $M^{1-\alpha}\to\infty$ да $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралы $+\infty$ ге умтулат, демек бул учурда катар жыйналбоочу болот.

в) $\alpha=1$ болгондо, $\ln M\to+\infty$, б. а. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\infty$ болуп, катар жыйналбайт.

Жыйынтыктап айтканда, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ жалпыланган катар $\alpha>1$ кезинде гана жыйналып, $\alpha\leqslant 1$ кезинде жыйналбоочу катар болот.

Даламбердин белгиси бул катардын жыйналуучулугун же жыйналбастыгын ачык айта албайт эле, анткени $l=1$ болуп калмак. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ катары салыштыруу белгисин колдонууда кеңири пайдаланылат.

§ 6. Белгиси өзгөрмө катарлар. Лейбництин белгиси

Эгерде катардын жанаша турган эки мүчөсү карама-каршы белгиде болушса, анда ал **белгиси өзгөрмө катар** деп аталат. Ал

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots \tag{1}$$

түрүндө болот, мындагы $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ дердин бардыгы оң.

Белгиси өзгөрмө катардын жыйналуучулугу жөнүндө төмөнкүдөй теореманы далилдөөгө болот. Ал **Лейбництин белгиси** деп аталат.

Теорема. Эгерде белгиси кезектешме (1) *катардын мүчөлөрү*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$$

барабарсыздыгын канааттандырып, монотондуу кемүүчү болсо жана $n \to \infty$ *да* a_n *жалпы мүчөсү нөлгө умтулса, б. а.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *болсо, анда* (1) *катар жыйналат*

Далилдөө. Биринчи иретте жуп номерлүү

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

толук эмес сумманы карайлык. Мындагы ар бир кашаада оң сан тургандыктан, S_{2k} дайыма оң болуп k чоңойгон сайын, ал өсүп олтурат. Экинчи жактан ал сумманы

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}$$

деп жазууга болот. Бул санда да ар бир кашаада оң сан тургандыктан, аларды калтырып койсок $S_{2k} < a_1$ болуп жогору жагынан чектелген болот, демек ал сумма чектүү пределге ээ болот:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S \leqslant a_1.$$

Эми жуп эмес номерлүү S_{2k+1} толук эмес сумманы алалык. Аны: $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$ түрүндө туюнтууга болот. Теореманын шарты боюнча $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$ болгондуктан, алдыңкы барабардыктан

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} = S$$

келип чыгат. Ошентип, бул сапар дагы толук эмес сумма баякы эле S ке умтулду. Демек, (1) катар жыйналат жана анын суммасы $0 \leqslant S \leqslant a_1$ болуп (1) катардын биринчи мүчөсүнөн аша албайт.

Ар кандай катардын биринчи $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ n мүчөсүн алып салгандан кийинки калган

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots$$

катар, ал катардын *калдыгы* деп аталат. Жыйналуучу катардын калдыгы да жыйналуучу катар болуп, анын суммасы $R_n = S - S_n$ ге барабар болот.

Ал эми белгиси кезектешме катардын: $R_n = (-1)^n \{a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots\}$ калдыгы дагы эле белгиси кезектешме катар болот. Бул калдык катардын суммасы чоңдугу боюнча анын a_{n+1} биринчи мүчөсүнөн чоң боло албайт жана ал калдыктын белгиси ушул a_{n+1} дин белгиси менен дал келишет.

Мисал. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \ldots$

катарынын жыйналуучулугун изилдегиле. Бул белгиси кезектешме катардын мүчөлөрү барган сайын кичирейип олтурат жана $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Ошондуктан Лейбництин белгиси боюнча жыйналуучу катар болот.

Эгер $n=6$ болгон биринчи алты мүчө менен чектелсек, анда кетирилген каталык $\frac{1}{49}$ ден ашпайт.

§ 7. Белгиси өзгөрмө катарлар. Сөзсүз (абсолюттук) жана шарттуу жыйналуучулук

Эгерде чексиз сандык катардын мүчөлөрү түрлүү белгилүү болушса, анда мындай катар **белгиси өзгөрмө катар** деп аталат. Алдыда каралып өткөн белгиси кезектешме катар белгиси өзгөрмө катардын айрым учуру болуп саналат.

Белгиси өзгөрмө катардын чексиз көп оң мүчөсү жана чексиз көп терс мүчөсү бар болот, анткени тигиниси же мунусу чектүү санда болсо, аларды калтырып коюп, дайыма бирдей белгилүү катарды алууга болот. Эгер калгандары бардыгы терс белгилүү болсо, аны —1 ге көбөйтүп, оң белгилүү катарга келүүгө болот.

Ошентип мындан ары каалагандай мүчөлүү $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ катарын карайбыз, б. а. оң жана терс мүчөлөрү кезектешпестен эле кездеше берген катарды карайбыз. Ал

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\dots+a_i+\dots \qquad (1)$$

катары болсун, мында a_i оң да, терс да боло алат. Анын мүчөлөрүнүн абсолюттук чоңдуктарынан:

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\dots+|a_n|+\dots \qquad (2)$$

катарын түзөбүз. Бул кадимки оң мүчөлүү сандык катар болот.

Теорема. *Эгер (2) катар жыйналса, анда (1) белгиси өзгөрмө катар дагы жыйналат.* Бул учурда (1) катар *сөзсүз жыйналуучу* деп аталат.

Далилдөө. (1) жана (2) катарлардын толук эмес суммаларын ирети менен S_n жана σ_n аркылуу белгилейбиз. Эгерде (1) катардын биринчи n мүчөсүнүн ичинде n_1 оң мүчө жана n_2 терс мүчө бар болсо, анда $S_n = S'_{n_1} - S''_{n_2}$ $(n=n_1+n_2)$ болору ачык, мында S'_{n_1} биринчи n_1 оң мүчөнүн суммасы, ал эми S''_{n_2} болсо, n_2 терс мүчөлөрдүн абсолюттук чоңдуктарынын суммасы. Анда (2) катардын n-толук эмес суммасы $\sigma_n = S'_{n_1} + S''_{n_2}$ аркылуу туюнтулат. Теореманын шарты боюнча (2) катардын, σ_n толук эмес суммасы чектүү σ пределге умтулат. Жогорку барабардыктарга катышкан S'_{n_1} жана S''_{n_2} суммалары n менен бирге өсүүчү чоңдуктар, бирок алар жогору жагынан σ менен чектелген, ошондуктан алардын ар бири S' жана S'' чектүү пределдерге умтулат, демек, анда $S=S'-S''$ дагы чектүү болот. Бул (1) катардын жыйналарын көрсөтөт. Ушуну менен теорема далилденди.

Мисал.

$$\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\dots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\dots \qquad (3)$$

катарынын жыйналуучулугун изилдегиле. Мында $\alpha = \text{const}$ болуп $\sin\alpha$ терс дагы, оң дагы мааниге ээ боло алгандыктан, (3) катар белгиси өзгөрмө катар болот. Анын мүчөлөрүнүн абсолюттук чоңдуктарынан түзүлгөн

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1}\right| + \left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + \ldots \tag{4}$$

жана

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{5}$$

катарын карап көрөлү. Бул катар *жалпыланган гармоникалык* катар жана $\alpha = 2 > 1$. Ошондуктан (5) жыйналат, демек (3) катар сөзсүз жыйналуучу болот.

Аныктама. *Эгер белгиси өзгөрмө (1) катар өзү жыйналуучу болуп, анын мүчөлөрүнүн абсолюттук чоңдуктарынан түзүлгөн (2) катар жыйналбоочу болсо, анда (1) катар шарттуу жыйналуучу катар деп аталат.*

Мисалдар. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n}$ белгиси кезектешме катары жыйналат, анткени Лейбництин белгисиндеги эки шарт тең аткарылат. Чынында эле мүчөлөрү монотондуу кемийт жана

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n} = 0.$$

Эми анын мүчөлөрүнүн абсолюттук чоңдуктарынан түзүлгөн $\sum\limits_{1=n}^{\infty}\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ катарын карап көрөлү. Бул 3 кө бөлүнүп коюлган гармоникалык катар экендиги көрүнүп турат, демек ал жыйналбоочу катар. Ошентип мисалда берилген катар шарттуу жыйналуучу болот.

2. $\frac{2}{3} - \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^n}{3^n} + \ldots$

катары берилсин. Бул катар өзү жыйналат, анткени ал мүчөлөрү кемүүчү жана $n \to \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ болгон белгиси кезектешме катар. Эми анын мүчөлөрүнүн абсолюттук чоңдуктарынан түзүлгөн

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \ldots$$

катарын карайлы. Бул бөлүмү $q = \frac{2}{3} < 1$ болгон чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия болгондуктан жыйналат. Демек, 2-мисалда берилген катар сөзсүз жыйналуучу болот.

Сөзсүз жыйналуучу катарлар бир катар касиеттерге ээ болот. Ал касиеттерди далилдөөсүз эле санап өтөбүз.

1. Сөзсүз жыйналуучу катарлардын мүчөлөрүнүн орундарын алмаштыруудан анын жыйналуучулугу бузулбайт.

2. Сөзсүз жыйналуучу

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \tag{1}$$

жана

$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots \tag{6}$$

эки катардын тиешелүү мүчөлөрүн кошуудан же кемитүүдөн түзүлгөн:

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\ldots+(a_n\pm b_n)+\ldots \tag{7}$$

катар дагы сөзсүз жыйналуучу болот. Мында (1) катардын суммасы S, ал эми (6) катардыкы σ болсо, анда (7) нин суммасы $S\pm\sigma$ болот.

3. Сөзсүз жыйналуучу (1) жана (6) эки катардын мүчөлөрүн өз ара көбөйтүүдөн түзүлгөн:

$$a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3+\ldots+a_1b_n+\ldots+a_2b_1+a_2b_2+\ldots+ \\ +a_2b_n+\ldots+a_nb_1+a_nb_2+\ldots+a_nb_n+\ldots \tag{8}$$

катар дагы сөзсүз жыйналуучу болот (мунун мүчөлөрү каалагандай иретте алынышы ыктымал) жана (8) катардын суммасы $S\sigma$ га барабар болот.

Э с к е р т ү ү. Шарттуу жыйналуучу катарлар жогорку касиеттерге ээ болбойт.

Мисал. Шарттуу жыйналуучу Лейбництин

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}}+\ldots$$

катарын карап көрөлүк. Бул катардын өзү жыйналат. (Лейбництин белгиси боюнча), бирок анын мүчөлөрүнүн абсолюттук чоңдуктарынан түзүлгөн гармоникалык катар жыйналбайт. Ошондуктан ал шарттуу жыйналуучу болот.

Ал эми катардын биринчи оң мүчөсүн, анан эки терс мүчөсүн алып, ирети менен жазып олтурабыз.

Анда:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\frac{1}{5}-\ldots+\underbrace{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}}+\ldots$$

катарына ээ болобуз. Бул жаңы катардын суммасы баштапкы шарттуу жыйналуучу катардын суммасынан эки эсе кичине болот. Чынында эле кийинки катардын ар бир үч мүчөсүнүн биринчисинен экинчисин кемитсек, ар бир группада экиден болгон:

$$\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}}+\ldots$$

катарына ээ болобуз. Мындан $\frac{1}{2}$ ди сыртка чыгарсак, эки эсе кичирейген баштапкы катарга ээ болобуз.

Ошентип, мүчөлөрүнүн орундарын алмаштыруудан шарттуу жыйналуучу катардын суммасы өзгөргөнүн көрдүк, б. а. орун алмаштыруу касиетине ээ эмес.

§ 8. Даражалуу катарлар. Жыйналуу областы

Мүчөлөрү $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ функциялары болушкан

$$f_1(x)+f_2(x)+\dots f_n(x)+\dots \tag{1}$$

катары функциялык катар деп аталат. Эгер x белгилүү бир x_0 маанисин алса, анда

$$f_1(x_0)+f_2(x_0)+\dots+f_n(x_0)+\dots \tag{2}$$

сандык катарга ээ болобуз. Бул сандык катар жыйналса, анда (1) катар x_0 чекитинде жыйналуучу деп аталат.

Эгер (1) катар $]a, b[$ интервалындагы ар кандай x те жыйналса, анда ал катарды ушул интервалда $f(x)$ суммасына ээ болот деп аташат да, аны

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots \qquad (a<x<b)$$

деп жазышат.

Бул учурда $f(x)$ функциясын $]a, b[$ интервалында (1) катарга ажыралат деп да коюшат.

$$C_0+C_1x+C_2x^2+\dots+C_nx^n+\dots \tag{3}$$

түрүндөгү катар **даражалуу катар** деп аталат. Мында $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n \dots$ коэффициенттери турактуу чоңдуктар. Даражалуу катар функциялык катардын айрым учуру болот.

$x=x_0$ маанисин койгондо түзүлгөн катар жыйналса, (3) даражалуу катар x_0 чекитинде жыйналуучу деп аталат.

Даражалуу катар кандайдыр бир $(-R, R)$ интервалында жатуучу бардык x те жыйналарын, ал эми анын сыртындагы x терде жыйналбасын көрсөтүүчү теореманы далилдөөгө болот. Ал Абелдин теоремасы деп аталат. Мындай касиетке ээ болгон $(-R, R)$ интервалы (3) даражалуу катардын *жыйналуу интервалы* деп аталат. Мындагы R саны *жыйналуу радиусу* деп аталат. Абелдин теоремасынын далилдөөсүн калтырып, жыйналуу радиусун аныктоочу төмөнкүдөй теореманы далилдейбиз.

Теорема. *Эгер* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|$ *предели бар болсо, анда* $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|$ *болот.*

Бул Коши—Адамардын теоремасы деп аталат.

Д а л и л д ө ө. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{C_{n+1}\cdot x^{n+1}}{C_n\cdot x^n}=\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\cdot x$ болгондуктан

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|\cdot|x| \text{ болору ачык.}$$

Даламбердин белгиси боюнча, эгер $l<1$, б. а. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|\cdot|x|<1$ болсо, катар жыйналат, ал эми $l>1$, б. а. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|\cdot|x|>1$ болсо, катар жыйналбайт.

Ошентип,

$$|x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$$

болгон x терде (3) катар жыйналат, ал эми

$$|x|>\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$$

болгон x терде (3) катар жыйналбайт. Мына ошентип, (3) катар үчүн чынында эле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$$

жыйналуу радиусу болот.

Эскертүү. $(-R, R)$ жыйналуу интервалынын учтарында (3) катар жыйналуучу болушу да, жыйналбай калышы да ыктымал. Бул учурлардын ар бирин өзүнчө текшерүү керек.

Мисалдар. 1. $+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\ldots+\frac{x^n}{3^n\cdot(n+1)}+\ldots$ даражалуу катарынын жыйналуу областын аныктагыла. Мында

$$C_n=\frac{1}{3^n(n+1)},\quad C_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}(n+2)}\ \text{болгондуктан:}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3^n(n+1)}:\frac{1}{3^{n+1}(n+2)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\cdot(n+2)}{3^n(n+1)}\right|=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{n+\frac{1}{n}}=3.$$

Демек бул катар $(-3, 3)$ интервалында жыйналат. Эми интервалдын учтарында жыйналар же жыйналбасын текшеребиз. $x=-3$ болсо,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\ldots$$

катарына ээ болобуз. Бул катар Лейбництин белгиси боюнча жыйналат. Ал эми $x=3$ болгондо $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ гармоникалык катары келип чыгат. Бул жыйналбоочу катар экендиги белгилүү. Ошентип, мисалда берилген катар $[-3, 3[$ жарым сегментинде жыйналат.

2. $$1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^5}{5^3\sqrt{4}}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{5^k\sqrt{k+1}}+\ldots$$

катарынын жыйналуу областын аныктагыла. Мында x^n даражасынын коэффициенти C_n болгондуктан $n=2k-1$ деп

$k=\frac{n+1}{2}$, $k+1=\frac{n+3}{2}$ экендигин табабыз. Демек,

$$C_n=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{5^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{\frac{n+3}{2}}}=(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5^{n+1}}\cdot\sqrt{n+3}}$$

болот. Анда

$$C_{n+1}=(-1)^{\frac{n+2}{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5^{n+2}}\cdot\sqrt{n+4}}.$$

Ошентип, бул катар үчүн:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5^{n+1}}\cdot\sqrt{n+3}}:\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5^{n+1}}\cdot\sqrt{n+4}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{n+4}{n+3}}\right|=\sqrt{5}.$$

Демек, бул катар үчүн: $(-\sqrt{5},\ \sqrt{5})$ жыйналуу интервалы болот.

$x=-\sqrt{5}$ болгон интервалдын сол жаккы учунда:

$$1+\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}}+\ldots+(-1)^{k+1}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{k+1}}+\ldots$$

катарына ээ болобуз. Бул катар Лейбництин белгиси боюнча жыйналат, анткени мүчөлөрү кемип жана $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{k+1}}=0$ болот.

Интервалдын $x=\sqrt{5}$ оң жаккы учунда

$$1-\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}}+\ldots+(-1)^k\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{k+1}}+\ldots$$

белгиси кезектешме катарына ээ болобуз. Бул катар дагы Лейбництин белгиси боюнча жыйналуучу катар болот. Ошентип, бул мисалдагы катар $[-\sqrt{5},\ \sqrt{5}]$ сегментинде жыйналат.

Эскертүү.

$$C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\ldots+C_n(x-x_0)^n+\ldots \tag{4}$$

түрүндөгү катар дагы даражалуу катар деп аталат. Бул $x-x_0$ дун даражасы боюнча жайгашкан. Эгер $x-x_0=z$ десек, (4) катар (3) түрүнө келет. Анын $(-R,\ R)$ жыйналуу интервалын аныктап алып, $-R<z<R$ барабарсыздыгына $-R<x-x_0<R$ деп коюп, мындан $x_0-R<x<x_0+R$ экендигин табабыз. Мына ошентип. (4) катар $]x_0-R,\ x_0+R[$ интервалында жыйналат.

§ 9. Даражалуу катарларды дифференцирлөө жана интегралдоо

Даражалуу катарларды мүчөлөп интегралдоо жана дифференцирлөө жөнүндө төмөнкүдөй теоремаларды далилдөөсүз эле келтиребиз.

1-теорема. $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ (1)

даражалуу катарды өзүнүн $(-R, R)$ жыйналуу интервалында мүчөлөп интегралдоого болот, мында пайда болгон:

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots \tag{2}$$

катары ошол эле $(-R, R)$ жыйналуу интервалына ээ болот жана

(1) нин суммасы $S(x)$ болсо, (2) катардын суммасы $F(x)=$

$=\int\limits_0^x S(x)\,dx$ болот.

2-теорема. (1) даражалуу катарды өзүнүн $(-R, R)$ интервалында мүчөлөп дифференцирлөөгө болот, мында пайда болгон:

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \tag{3}$$

катары, ошол эле $(-R, R)$ жыйналуу катарына ээ болуп, анын бардык $|x|<R$ маанилериндеги суммасы $\Phi(x)=S'(x)$ барабар болот, мында $S(x)$ болсо, (1) катардын суммасы.

Бул далилдөөсүз келтирилген эки теорема тигил же бул катардын жыйналуучулугун изилдеп, суммасын табууда кеңири колдонулат. Аны мисалдарда көрсөтөбүз.

Мисалдар. 1. $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots nx^{n-1}+\ldots$ (4)

катарынын жыйналуу интервалын аныктагыла жана анын суммасын тапкыла.

Чыгаруу. Бул берилген катардын изделген суммасын $S(x)$ аркылуу белгилейлик.

Эми аны мүчөлөп интегралдап, 1-теорема боюнча

$$F(x)=\int\limits_0^x S(x)\,dx=x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \tag{5}$$

катарына ээ болобуз. Эгер $|x|<1$ болсо, бул (5) катар чексиз кемүүчү прогрессияны түзүп жыйналуучу катар болот жана анын $F(x)$ суммасы $F(x)=\frac{x}{1-x}$ ке барабар болот.

Ал эми $F(x)=\int\limits_0^x S(x)\,dx$ барабардыгын x боюнча дифференцирлесек, $F'(x)=S(x)$ келип чыгат. Ошентип, (4) катардын суммасы $|x|<1$ кезинде:

$$S(x)=F'(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

болот. (5) катардын жыйналуу интервалы $(-1, 1)$ болгондуктан, (4) катардын дагы ошол эле $(-1, 1)$ интервалы болот.

$$2.\ x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots \qquad (6)$$

катардын жыйналуу интервалын аныктагыла жана анын суммасын тапкыла.

Чыгаруу. Берилген катарды мүчөлөп дифференцирлесек, жөнөкөйлөнө тургандыгы көрүнүп турат. Эгерде анын суммасын $S(x)$ аркылуу белгилесек, анда

$$S'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n+1}x^{2n}+\ldots \qquad (7)$$

катарына ээ болобуз. Бу катар биринчи мүчөсү 1, ал эми бөлүмү x^2 болгон геометриялык прогрессия экендиги ачык. Демек, $|-x^2|=|x^2|<1$ болгон кезде, (7) катар жыйналат жана анын суммасы $S'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ болот. Мындан $S(x)$ аныктоо үчүн аны 0 дөн x чейин интегралдоо жетиштүү:

$$S(x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x.$$

Ошентип (6) катардын суммасы arctgx ке барабар, аны

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \qquad (6а)$$

жазабыз. (7) катар үчүн жыйналуу интервалы $(-1, 1)$ болгондуктан, ал (6) катар үчүн дагы жыйналуу интервалы болот.

§ 10. Элементардык функцияларды даражалуу катарларга ажыратуу

Кээ бир элементардык функцияларды даражалуу катарларга ажыратуу үчүн *Тейлордун формуласы* деп аталуучу формуладан пайдаланууга туура келет. Ал эми Тейлордун формуласы орундаларын көрсөтүү үчүн Роллдун жалпыланган теоремасына таянууга туура келет.

Тейлордун жалпыланган теоремасы.

Эгер $[a, в]$ сегментинде аныкталган $y=f(x)$ функциясы n ирет дифференцирленүүчү болсо, андан тышкары:

$$f(a)=f(в)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0 \qquad (1)$$

барабардыгы аныкталса, анда $[a, в]$ сегментинен $f^{(n)}(c)=0$ боло турган жок дегенде бир с чекити табылат.

Д а л и л д ө ө. Теореманын шарты боюнча $f(a)=f(в)$ болгондуктан, Роллдун теоремасы боюнча $[a, в]$ сегментинен $f'(x_0)=0$ боло турган жок дегенде $a<x_0<в$ болгон бир x_0 чекити табылат. Анда $f'(x)$ функциясы $[a, x_0]$ аралыгында Роллдун теоремасынын шарттарын канаатандырат, анткени (1) боюнча $f'(a)=0$ жана $f'(x_0)=0$. Мына ошондуктан, $a<x_1<x_0$ кезинде $f''(x_1)=0$ боло турган бир x_1 чекити табылат.

Роллдун теоремасын ирети менен $f''(x), f'''(x), ..., f^{(n-1)}(x)$ функцияларына колдонуп $a<c<x^{n+1}$ кезинде $f^{(n)}(c)=0$ боло турган жок дегенде бир c чекити табыларына ынанабыз. Ушуну менен теорема далилденди.

Эми Тейлордун формуласын чыгарууга киришебиз.

Бизге $[x_0, в]$ сегментинде n ирет дифференцирленүүчү $y=f(x)$ функциясы берилсин.

Эми $P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\frac{a_2}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{a_n}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$ (2)

болгон кезинде

$$\varphi(x)=f(x)-P(x) \quad (3)$$

функциясын карап көрөлү. Аны n ирет дифференцирлеп төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(x)=f(x)-a_0-a_1(x-x_0)-\frac{a_2}{2!}(x-x_0)^2-\ldots-\frac{a_n}{n!}(x-x_0)^n,\\
&\varphi'(x)=f'(x)-a_1-a_2(x-x_0)-\frac{a_3}{2!}(x-x_0)^2-\ldots-\frac{a_n}{(n-1)!}\times\\
&\times(x-x_0)^{n-1},\\
&\varphi''(x)=f''(x)-a_2-a_3(x-x_0)-\ldots-\frac{a_n}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x)-a_{n-1}-a_n(x-x_0)\\
&\varphi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-a_n
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Эгер $\varphi(x)$ функциясы Роллдун жалпыланган теоремасынын шартын канааттандырсын деп талап кылсак, анда (4) дөн төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(x_0)=f(x_0)-a_0=0,\\
&\varphi'(x_0)=f'(x_0)-a_1=0,\\
&\varphi''(x_0)=f''(x_0)-a_2=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi^{(n-1)}(x_0)=f^{(n-1)}(x_0)-a_{n-1}=0,\\
&\varphi(b)=f(b)-a_0-a_1(b-x_0)-\frac{a_2}{2!}(b-x_0)^2-\ldots-\\
&-\frac{a_n}{n!}(b-x_0)^n=0
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Бул системанын биринчи n теңдемесинен $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ коэффициенттерин алабыз. a_n ди акыркы теңдемесинен табабыз.

Мына ошентип, эгерде $P(x)$ тин $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ коэффициенттери (5) системанын теңдемелерин канааттандырса, анда $\varphi(x)$ функциясы Роллдун жалпыланган теоремасынын шарттарын канааттандырат, ошондуктан ал теорема боюнча $x_0 < c < в$ кезинде

$$\varphi^{(n)}(c) = f_{(c)}^{(n)} - a_n = 0 \tag{6}$$

боло турган жок дегенде бир c мааниси табылат.

Жогорку (5) системасынын биринчи n теңдемесинен табылган $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$:

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),\ a_2 = f''(x_0), \ldots, a_{n-1} = f^{(n-1)}(x_0) \tag{7}$$

коэффициенттерин жана (6) дан табылган

$$a_n = f^{(n)}(c),\ x_0 < c < в \tag{8}$$

коэффициенттерин (5) системасынын акыркы теңдемесине коюп:

$$f(b) = f(x_0) + f'(x_0)(b - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(b - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(b - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b - x_0)^n \tag{9}$$

формулага келебиз. Мындан $в$ ны x ке алмаштырганда келип чыгуучу:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \tag{10}$$

формуланы **Тейлордун формуласы дешет.**

Тейлордун формуласындагы акыркы:

$$R_n = \frac{f^{n}(c)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x_0 < c < x \tag{11}$$

кошулуучуну Лагранж формасындагы калдык мүчө дешет. Мында $C = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$ деп жазууга болот.

Эгер $x_0 = 0$ болсо (10) дан **Маклорендин формуласы** деп атала турган:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} +$$

$$+ \frac{f^{n}(\theta)x}{n!} x^n \tag{12}$$

формулага ээ болобуз, мында $0 < \theta < 1$.

Бул учурда R_n калдык мүчөсү:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \tag{13}$$

түрүнө келет.

Эгерде $n \to \infty$ да $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ (14)

болсо, анда Тейлордун (10) формуласынан $f(x)$ функциясынын $x-x_0$ боюнча даражалуу катарга ажыратылышына ээ болобуз.

Ал Тейлордун катары деп аталат жана төмөнкү түргө ээ болот:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots \qquad (15)$$

Эгер $x_0=0$ болсо, Маклорендин катары деп аталуучу:

$$f(x) = f(x_0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \ldots \qquad (16)$$

катарга ээ болобуз.

Каалагандай $y=f(x)$ функциясынын Тейлордун же Маклорендин катарына ажырала тургандыгын далилдөө үчүн R_n ирети менен (11) жана (13) боюнча аныкталган учурда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ экендигин далилдөө керек.

Мисалдар. 1. $f(x)=\cos x$ функциясын Маклорендин катарына ажыраткыла.

Берилген $f(x)=\cos x$ функциясын n ирет дифференцирлейбиз. Мында:

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(x) =$$

$$= -\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ \ldots, \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

экендиги ачык. Мындан:

$$f(0)=1, \quad f'(0)=0, \quad f''(0)=-1, \quad f'''(0)=0, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2}$$

экендиги табылат. Ошентип, $n=2k$ болсо, $f^{(2k)}(0)=\cos\pi k = (-1)^{k-1}$, ал эми $n=2k-1$ болсо $f^{(2k-1)}(0)=0$ болоруна ынанабыз.

Бул маселелерди Маклорендин (12) формуласына коюп:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1} \qquad (17)$$

экендигин табабыз, мында

$$R_{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\cos\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad 0<\theta<1. \qquad (18)$$

Ал эми $n \to \infty$ да $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ жана $\left| \cos\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \leqslant 1$

болгондуктан, $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+1} = 0$.

Ошондуктан, $f(x) = \cos x$ функциясы төмөнкүдөй катарга ажырайт

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{17a}$$

2. Ушундай эле жол менен $y = \sin x$ функциясы Маклорендин:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \tag{19}$$

катарына ажыраларын көрсөтүүгө болот.

3. $f(x) = e^x$ функциясын Маклорендин катарына ажыраткыла. Бул функцияны да n ирет дифференцирлейбиз:

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x,$$
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1, \ldots, f^{(n)}(0) = 1.$$

Ошондуктан Маклорендин төмөнкү формуласына келебиз:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n. \tag{20}$$

Мында

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}. \tag{21}$$

Ал эми x чектүү кезинде $f^{(n)}(\theta x) = \theta x$ чектелген чоңдук болгондуктан, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ экендигин далилдөө үчүн $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ экендигин көрсөтүү жетиштүү болот. Ан үчүн x өзгөрбөсүн деп $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ катарын карайбыз.

Даламбердин белгиси боюнча:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1.$$

Демек бул катар жыйналат. Ал эми жыйналуучу катардын жалпы мүчөсү $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ ге умтулары белгилүү. Ошентип,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} e^{\theta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

болгондуктан, Маклорендин (2) формуладагы калдык мүчөсүн калтырып коюп, Маклорендин

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{20a}$$

катарына ээ болобуз. Бул катар бүткүл $(-\infty, \infty)$ сандык окто жыйналат.

4. $f(x)=(1+x)^{\beta}$ функциясын β каалагандай анык сан кезинде Маклорендин катарына ажыраткыла. Эгер $\beta=n$ бүтүн оң сан болсо, кадимки Ньютондун биномунун чектүү суммасына ээ болобуз. Ал эми β каалагандай анык сан кезинде $f(x)=(1+x)^{\beta}$ дан n ирет туунду алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$f(x)=(1+x)^{\beta},\ f'(x)=\beta(1+x)^{\beta-1},\ f''(x)=\beta(\beta-1)(1+x)^{\beta-2},\dots$$
$$\dots f^{(n)}(x)=\beta(\beta-1)\dots[\beta-(n-1)](1+x)^{\beta-n}(\beta>n).$$

Мындан:

$$f(0)=1,\ f'(0)=\beta,\ f''(0)=\beta(\beta-1),\ f'''(0)=\beta(\beta-1)(\beta-2),\dots$$
$$\dots f^{(n-1)}(0)=\beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n+2).$$

Маклорендин (12) формуласы боюнча:

$$(1+x)^{\beta}=1+\beta x+\frac{\beta(\beta-1)}{2!}\cdot x^2+\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{3!}\cdot x^3+\dots$$
$$\dots+\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n+2)}{(n-1)!}\cdot x^{n-1}+R_n \tag{22}$$

Мында: $$R_n=\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n+1)}{n!}(1+\theta x)^{\beta-n}\cdot x^n \tag{23}$$

экендигине ээ болобуз.

Эгер $|x|<1$ болсо, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$ болорун далилдөөгө болот, анын далилдөөсү татаал болгондуктан, бул жерде аны келтирип олтурбайбыз. Ошентип, $f(x)=(1+x)^{\beta}$ функциясы төмөнкүдөй Маклорендин катарына ажырайт:

$$(1+x)^{\beta}=1+\beta x+\frac{\beta(\beta-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{n!}x^n+\dots \tag{22a}$$

5. $f(x)=ln(1+x)$ функциясы $|x|<1$ кезинде Маклорендин:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots \tag{24}$$

катарына ажырайт (ажыратууну өзүңөргө сунуш кылабыз).

Эгер бул катарда x ти $-x$ менен алмаштырып чыксак, анда

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots-\frac{x^n}{n}-\dots \tag{25}$$

катарына ээ болобуз. (24) дөн (25) ни мүчөлөп кемитип,

$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ экендигин эске алсак:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left[1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\dots+\frac{x^{2k}}{2k+1}+\dots\right] \tag{26}$$

катары келип чыгат. $|x|<1$ кезинде бул катар (24) гө караганда тез жыйналат.

Мына ушул катар натуралдык сандардын натуралдык логарифмдерин эсептөө үчүн кеңири колдонулат.

§ 11. Катарларды жакындаштырып эсептөөлөргө колдонуу

Жакындаштырып эсептөөлөрдө катарлар кеңири колдонулат. Мындай колдонуштарды мисалдарда көрсөтөбүз.

Мисалдар. 1. $\sqrt[3]{e}$ санын $\varepsilon=0{,}0001$ ге чейинки тактык менен эсептегиле.

$f(x)=e^x$ функциясы үчүн:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

ажыратуусу орун аларын билебиз. Мына ушул ажыратууда $x=\frac{1}{3}$ болсун десек:

$$\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{3\cdot 1!}+\frac{1}{3^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{1}{3^n\cdot n!}$$

болжолдуу барабардыгына ээ болобуз. Кетирилген каталыкты эсептөө үчүн Тейлордун калдык мүчөсүнүн формуласынан колдонобуз.

$f(x)=e^x$ үчүн $f^{(n+1)}(x)=e^x$ болгондуктан:

$$R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<c<x)$$

болот. Бул мисалда $x=\frac{1}{3}$, демек $R_n\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{e^c}{(n+1)!}\ \frac{1}{3^{n+1}}$.

Ал эми $e^c<e^{\frac{1}{3}}<\sqrt[3]{3}<3$ болгондуктан

$$R_n\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{3}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!3^n}$$

экендиги ачык.

$\sqrt[3]{e}$ маанисин эсептөөдөгү каталык $\varepsilon=0{,}0001$ ден ашпасын үчүн $n=5$ деп алуу жетиштүү болот, анткени

$$R_5\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{1}{(5+1)!\cdot 3^5}=\frac{1}{174960}<0{,}0001.$$

Ошентип, $\varepsilon=0{,}0001$ ге чейинки тактык менен:

$$\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2\cdot 2!}+\frac{1}{3^3\cdot 3!}+\frac{1}{3^4\cdot 4!}+\frac{1}{3^5\cdot 5!}\approx$$

$$\approx 1+0{,}33333+0{,}05555+0{,}00678+0{,}00051+0{,}00003,$$

$$\sqrt[3]{e}\approx 1{,}39620$$

Демек $\sqrt[3]{e}$ санынын $\varepsilon=0{,}0001$ ге чейинки тактык менен эсептелген мааниси $\sqrt[3]{e}\approx 1{,}3962$ болот.

2. $\sqrt[4]{84}$ санынын маанисин 0,0001 ге чейинки тактык менен эсептегиле. Муну эсептөө максатында төртүнчү даражасы 84 төн ашпаган эң чоң бүтүн санды тандап алабыз. Андай сан үчүн 3 тү алууга болот, анткени $3^4=81<84$, ал эми $4^4=256>84$.

Эми $\sqrt[4]{84}$ санын төмөнкүчө жазууга болот:

$$\sqrt[4]{84}=\sqrt[4]{81+3}=\sqrt[4]{\left[81\left(1+\frac{3}{81}\right)\right]}=3\sqrt[4]{1+\frac{1}{27}}=3\left(1+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Мындагы акыркы кашаага $\beta=\frac{1}{4}$ жана $x=\frac{1}{27}$ деп биномдук катардын (22 а) формуласын колдонобуз:

$$\sqrt[4]{84}=3\left[1+\frac{\frac{1}{4}}{1!}\cdot\frac{1}{27}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{27}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{27}\right)^3+\ldots\right]=$$

$$=3+\frac{3}{4\cdot 27}-\frac{3\cdot 3}{2!\,4^2\cdot 27^2}+\frac{3\cdot 3\cdot 7}{3!\,4^3\cdot 27^3}-\frac{3\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4!\,4^4\cdot 27^4}+\ldots .$$

Мына ошентип, $\sqrt[4]{84}$ саны белгиси кезектешме болуп, мүчөлөрү абсолюттук чоңдугу боюнча кемүүчү катардын суммасы аркылуу туюнтуларын көрдүк. Аны эсептөөдө кетирилген каталык эсептөөгө киргизилбей калтырылып коюлган мүчөлөрдүн биринчисинин чоңдугунан ашпастыгын билебиз. Бул мисалда

$$\frac{3\cdot 3\cdot 7}{3!4^3\cdot 27^3}>0{,}0001, \text{ ал эми } \frac{3\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4!\,4^4\cdot 27^4}<0{,}0001$$

болгондуктан, ушул мүчөдөн баштап бардык мүчөлөрүн калтырып коёбуз да биринчи үч мүчө менен гана чектелебиз:

$$\sqrt[4]{84}\approx 3{,}00000+0{,}02778-0{,}00038=3{,}02740.$$

Ошентип $\varepsilon=0{,}0001$ ге чейинки тактык менен $\sqrt[4]{84}\approx 3{,}0274$ маанисине ээ болобуз.

3. $\sin 9°$ тун маанисин $\varepsilon=0{,}0001$ ге чейинки тактык менен эсептеп чыккыла. Муну эсептөө үчүн $f(x)=\sin x$ функциясынын Маклорендин катарына ажыратылган:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

формуласынан пайдаланабыз. Мисалда берилген 9° тун $9°=\frac{\pi}{180}\cdot 9=$

$=\frac{\pi}{20}$ радиандык ченин алуу керек, анткени алдыңкы формула x тин радиандык чени үчүн орун алат. Бул маанини коюп төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\sin\frac{\pi}{20}=1-\frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^7}{7!}+\ldots$$

Бул сапар дагы Лейбництин белгиси орун ала тургандай болгон белгиси кезектешме катарга ээ болдук. Мында $\frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^5}{5!}<0{,}0001$ болгондуктан үчүнчү мүчөдөн баштап калган бардык мүчөлөрүн калтырып коюш керек, б. а. $\varepsilon=0{,}0001$ тактык менен эсептөө үчүн биринчи эки мүчө гана жетиштүү болот:

$$\sin\frac{\pi}{20}\approx 1-\frac{\pi^3}{3!\,8000}=1-\frac{(3{,}1416)^3}{48000}=0{,}15643.$$

Мына ошентип, $\varepsilon=0{,}0001$ чейинки тактык менен эсептегенде $\sin 9^\circ\approx 0{,}1564$ маанисине ээ болобуз.

4. Эми сандардын натуралдык логарифмдерин жакындаштырып эсептөөгө токтололук. Эгер (26) формулада $x=\frac{1}{2n+1}$ деп белгилесек, анда $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$ болот да (26) катар төмөнкүчө жазылат:

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5\cdot(2n+1)^4}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}+\ldots\right]. \qquad (27)$$

Эгер $n=1$ десек, мындан:

$$\ln\frac{2}{1}=\ln 2=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{5\cdot 3^4}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)\cdot 3^{2k}}+\ldots\right] \qquad (28)$$

экендиги келип чыгат. Бул катар боюнча $ln2$ нин маанисин каалагандай тактыкта эсептөөгө болот. Мунун биринчи 9 мүчөсү менен чектелсек $ln2=0{,}693147180$ болот, мындагы үтүрдөн кийинки 9 цифранын бардыгы ишенимдүү.

Эгер ошол эле (27) де $n=2$ болсун десек:

$$\ln 3-\ln 2=\frac{2}{5}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^6}+\ldots\right] \qquad (29)$$

катарына ээ болобуз. Оң жаккы катардын биринчи бир нече мүчөсүн суммалап, $ln2$ нин мааниси белгилүү болгондуктан, мындан $ln3$ тү каалагандай тактыкта эсептөөгө болот.

Бардык жөнөкөй сандардын логарифмдери эң оңой эсептелет. Алсак, $ln4=ln2^2=2\cdot ln2$ болгондуктан $ln2$ нин маанисин 2 ге көбөйтүп, $ln4$ түн маанисине ээ болобуз.

$$ln6=ln(2\cdot 3)=ln2+ln3;\ ln8=ln(2\cdot 4)=ln2+ln4;$$
$$ln9=ln3^2=2\cdot ln3;\ ln10=ln(2\cdot 5)=ln2+ln5;$$
$$ln12=ln(3\cdot 4)=ln3+ln4;\ ln18=ln(3\cdot 6)=ln3+ln6$$

ж. б. болгондуктан, булардын логарифмдери да оңой эле эсептелет.

Ошентип, катарлар жакындаштырып эсептөөлөргө кеңири колдонуларына толук ынандык.

ПАЙДАЛАНЫЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П., Краткий курс высшей математики. М., 1975.
2. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. М., 1973.
3. Лихолетов И. И., Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. Минск, 1976.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики т.т. 1, 2. М., 1974.
5. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М., 1975.
6. Клетников Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1972.
7. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу матанализа. М., 1975.
8. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М., 1975.
9. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М., 1971.
10. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии М., «Наука», 1980.
11. Бугров Я. С. Никольский С. М., Дифференциальное и интегральное исчисление. М., «Наука», 1980.
12. Фихтенгольц Г. М.. Основы математического анализа. т.т. 1, 2, М., 1968.
13. Маркович Э. С. Курс высшей математики М., «Высшая школа», 1970.
14. Ивашев-Мусатов О. С. Начала математического анализа. М., 1973.
15. Усубакунов Р. Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр I, II, III бөлүктөр, Фрунзе, «Мектеп», 1966, 1969. 1981.

МАЗМУНУ

I бөлүм. АНАЛИТИКАЛЫК ГЕОМЕТРИЯ ЖАНА ВЕКТОРДУК АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

II бөлүм. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨР

VI глава. Функциялар жана алардын графиктери

VII глава. Функциянын предели жана үзгүлтүксүздүгү

VIII глава. Туунду жана дифференциал

IX глава. Туундуну функцияны изилдөөгө колдонуу

X глава. Көп өзгөрмөлүү функциялар

Ибрагимова Бактыгүл 1984
Искамидиновна
2 Өзгөн. физмат 3 курс.
2-сентябрь. саат 12⁰⁰ күндүзү